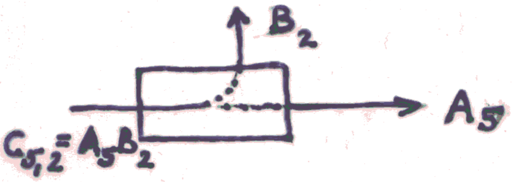
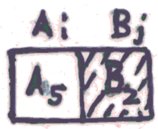
Přenos informace diskrétním kanálem





$C_{ij} = A_i B_j$

rušivý proces v kanále → informace v přijaté zprávě je menší

Zprávy jsou tvořeny dvojicí prvků $C_{ij} = A_i B_j$ $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, r$.

Vyslání konkrétní zprávy: $C_{5,2} = A_5 B_2$

rušení → zkreslení zprávy : přijata je pouze zpráva A_5

Pravděpodobnosti výskytu jednotlivých zpráv a prvků: $P(C_{ij})$, $P(A_i)$, $P(B_j)$

* Jaké je množství informace v přijaté zprávě?

Množství přijaté informace nelze hodnotit izolovaně - ale v souvislosti s vyslanou informací.

Neplatí: $I(A_5) = -\log P(A_5)$! Potom bychom stejné množství informace přijali i při chybné detekci a příjmu zprávy A_5 při vyslání libovolné C_{ij}.

Množství přijaté informace = rozdíl mezi $I(C_{5,2})$ a ztracenou informací t.j. části zprávy B_2 (viz. obr.)

Přijatá informace : $I(C_{5,2} A_5) = I(C_{5,2}) - I(B_2) = \log P(C_{5,2}) + \log P(B_2)$

$$= \log \frac{P(B_2)}{P(C_{5,2})}.$$

Vyjádření $P(B_2)$:

simultánní pravděpodobnost výskytu $C_{5,2}$ a pozorování A_5:

$$P(C_{5,2} A_5) = P(C_{5,2})\, P(A_5 | C_{5,2}) = P(A_5)\, P(C_{5,2} | A_5)$$

jev $(A_5 | C_{5,2})$ je jistým jevem → $P(A_5 | C_{5,2}) = 1$, $A_i B_j$ jsou nezáv.

$$P(C_{5,2} | A_5) = \frac{P(C_{5,2})}{P(A_5)} = \frac{P(A_5)\, P(B_2)}{P(A_5)} = P(B_2)$$

$$\Longrightarrow \quad I(C_{5,2} A_5) = \log \frac{P(C_{5,2} | A_5)}{P(C_{5,2})}.$$

Zobecnění:

označme vstup kanálu : zdroj s abecedou $(x_1, x_2, \dots x_s)$; prvky na výstupu $(y_1, y_2, \dots, y_s)$, potom informace přenesená kanálem při vyslání x_i a přijetí y_j bude :

$$I(x_i y_j) = \log \frac{P(x_i | y_j)}{P(x_i)}$$

Je to přenesená (užitečná) informace ; VZÁJEMNÁ INFORMACE

Množství informace přenesení kanálem je dáno logaritmickým poměrem pravděpodobnosti výskytu zprávy u příjemce po jejím přijetí (aposteriorní pravd. zprávy) ku pravděpodobnosti výskytu zprávy u příjemce před jejím přijetím (apriorní pravd. zprávy)

t.j.

$$I(x_i;y_j) = \log\frac{1}{P(x_i)} - \log\frac{1}{P(x_i|y_j)} = I(x_i) - I(x_i|y_j)$$

$$I(x_i|y_j) = \underbrace{I(x_i) - I(x_i;y_j)}_{\text{rozdíl mezi vstupní a přenesenou informací}}.$$

ZTRACENÁ INFORMACE

podmíněná informace

VZÁJEMNÁ INFORMACE $I(x_i;y_j)$ má symetrickou vlastnost → možnost vzájemné záměny x_i a y_j :

$$I(x_i;y_j) = \log\frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)} = \log\frac{P(y_j|x_i)}{P(y_j)} \qquad (*)$$

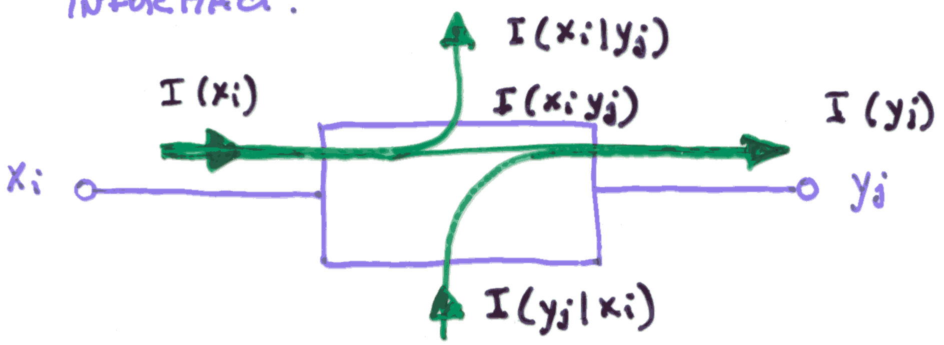
$$D: \log\frac{P(x_i)\,P(y_j|x_i)}{P(x_i)\,P(y_j)} = \log\frac{P(y_j)\,P(x_i|y_j)}{P(x_i)\,P(y_j)} = \log\frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)} = I(x_i;y_j)$$

dále viz $(*)$ $I(x_i;y_j) = \log\frac{P(y_j|x_i)}{P(y_j)} = \log\frac{1}{P(y_j)} - \log\frac{1}{P(y_j|x_i)} = I(y_j) - I(y_j|x_i)$

Informace přijatého prvku :

$$I(y_j) = I(x_i;y_j) + I(y_j|x_i).$$

Celková informace obsažená v přijatém prvku y_j je dána součtem informace přenesení kanálem (užitečná informace) a podmíněné informace $I(y_j|x_i)$ určené podmíněnou pravděpodobností $P(y_j|x_i)$. Tato podmíněná pravděpodobnost vyjadřuje pravděpodobnost chyby na výstupu přijímacího zařízení. Odpovídající množství informace $I(y_j|x_i)$ nazýváme CHYBOVOU, RUŠIVOU INFORMACÍ.



PŘENOS DÍLČÍ INFORMACE KANÁLEM

Používání vzájemné informace $I(x_i y_j)$ je prakticky nevýhodné – pro každou dvojici $i\,j$ bude tato informace jiná!

PRŮMĚRNÁ HODNOTA:

$$I(XY) = \overline{I(x_i y_j)} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} I(x_i y_j)\, P(x_i y_j) = \sum\sum P(x_i y_j) \log \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)}$$

$!\left(I(XY) \equiv \overline{I(XY)} \right)$; stejně tak dále:

$$I(X|Y) = \overline{I(x_i|y_j)} = \overline{I(x_i)} - \overline{I(x_i y_j)} = H(X) - I(XY) = H(X|Y)$$

$$I(Y|X) = \overline{I(y_j|x_i)} = H(Y) - I(XY) = H(Y|X)$$

Podmíněné informace se nazývají <u>podmíněné entropie</u>

Vztah pro podmíněnou entropii lze rozepsat:

$$H(X|Y) = H(X) - I(XY) = H(X) - \sum\sum P(x_i y_j) \log \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)} = H(X) + \sum_i\sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i) - \sum_i\sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i|y_j).$$

dále:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} P(x_i y_j) \log P(x_i) = \sum_i\sum_j P(x_i)\, P(y_j|x_i) \log P(x_i) = \qquad (**)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \Big[P(x_i) \log P(x_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{r} P(y_j|x_i)}_{=1} \Big] = -H(X)$$

$$\Rightarrow ! \quad H(X|Y) = -\sum_i\sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i|y_j)$$

analogicky:

$$H(Y|X) = -\sum\sum P(x_i y_j) \log P(y_j|x_i).$$

Vyplývají důležité vztahy:

$$\boxed{I(XY) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X).}$$

Množství informace lze obecně spojovat s libovolnou úplnou soustavou jevů (resp. rozdělením pravděpodobností takové soustavy) – potom lze s libovolným rozdělením pravděpodobností úplné soustavy spojovat i pojem průměrné informace tj. entropie

→ uvažme podmíněné jevy $(x_i|y_j)$

úplná soustava: $\sum_{i=1}^{s} P(x_i|y_j) = 1$ pro libovolné j

$I(x_i|y_j) = -\log P(x_i|y_j)$; průměrné množství info:

$$I(X|y_j) = \sum_i P(x_i|y_j)\, I(x_i|y_j) = -\sum_i P(x_i|y_j) \log P(x_i|y_j).$$

Střední hodnota podle j bude dále:

$$I(X/Y) = \sum_j P(y_j)\, I(X/y_j) = \sum_i \sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i|y_j) = H(X|Y)$$

Uvažujme simultánní jevy $(x_i y_j)$, pro $i=1,\dots s$ a $j=1,\dots r$ tvoří úplnou soustavu:
$$\sum_i \sum_j P(x_i y_j) = 1$$

$$I_s(x_i \text{ a } y_j) = -\log P(x_i y_j)$$

! Pozor na odlišení od přenesené informace $I(x_i; y_j)$!

Průměrné množství informace (simultánní entropie $H(XY)$):

$$H(XY) = -\sum_i \sum_j P(x_i y_j)\, I_s(x_i \text{ a } y_j) = -\sum_i \sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i y_j) .$$

Pomocí simultánní entropie $H(XY)$ můžeme dále vyjádřit přenesenou informaci $I(XY)$: a podobně jako u (**)

$$H(XY) = -\sum\sum P(y_j|x_i) P(x_i) \log - \sum\sum P(x_i) P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i) = H(X) + H(Y|X)$$

obdobně

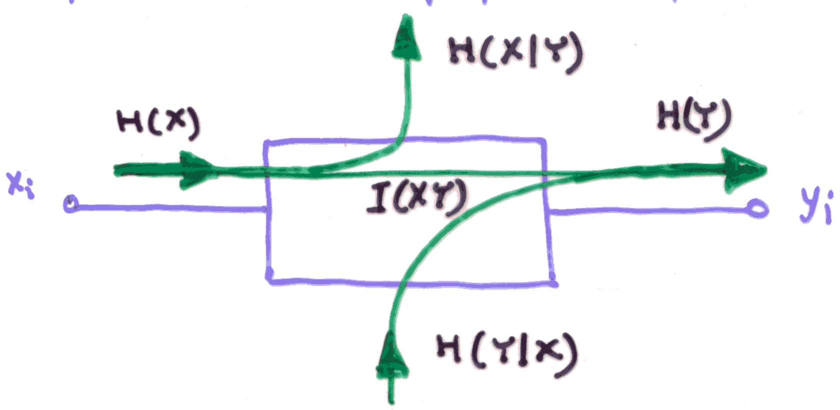
$$H(XY) = H(Y) + H(X|Y)$$

dosadíme-li za $H(Y|X)$ z dřívějších vztahů, dostaneme:

$$H(XY) = H(X) + H(Y) - I(XY)$$

t.j. $$I(XY) = H(X) + H(Y) - H(XY).$$

Uvedených pět entropií (průměrných informací) $H(X), H(Y), H(X|Y)$ $H(Y|X), H(XY)$ spolu s průměrnou přenesenou informací $I(XY)$ plně charakterizují přenos informace kanálem.



PŘENOS INFORMACE KANÁLEM VYJÁDŘENÝ ENTROPIEMI.

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI PŘENOSU

a) $I(XY)$ vyjadřuje průměrné množství užitečné informace na výstupu kanálu, které získáme o libovolném vyslaném prvku x_i přijetím libovolného prvku y_j.
(Průměrná hodnota = střední hodnota z množiny možných hodnot)

b) $I(XY)$ má symetrickou vlastnost $(x_i \Leftrightarrow y_j)$

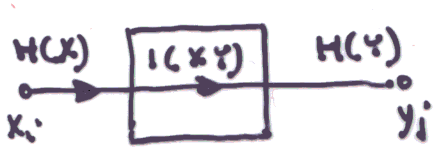
c) $I(XY)$ lze vyjádřit jako rozdíl mezi průměrnou vyslanou informací $H(X)$ a průměrnou ztracenou informací $H(X|Y)$

d) Dk symetrie: $I(XY)$ je rozdíl mezi průměrnou přijatou informací $H(Y)$ a průměrnou rušivou informací $H(Y|X)$

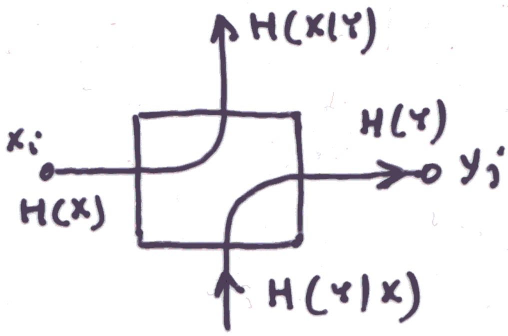
e) $I(XY) = H(X) + H(Y) - H(XY)$, kde $H(XY)$ je tzv. vlastní informace, která vyjadřuje množství informace připadající v průměru na libovolný pár $x_i y_j$.

f) Bude-li mezi vstupem a výstupem kanálu existovat nezávislost, nebude přijatý prvek y_j vůbec záviset na vyslaném prvku x_i, $P(x_i|y_j) = P(x_i)$ a pro $I(XY) = 0$. (také z $H(X|Y) = H(X)$)
Situace, kdy v kanálu existuje silný rušivý proces, vyhodnocení prvku na výstupu bude zcela náhodné.

g) Přenesená informace $I(XY)$ bude maximální, jestliže ztracená informace $H(X|Y)$ bude nulová:
$I(XY) = H(X)$ (kanál bez rušení)



$$I(XY) = H(X) = H(Y)$$
$$H(X|Y) = H(Y|X) = 0$$



$$I(XY) = 0$$
$$H(X) = H(X|Y)$$
$$H(Y) = H(Y|X)$$

2.2.1.

$$\boxed{H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)}$$

Příklady:

① Stanovte účinnost zdroje, jehož abeceda je $x_1, x_2 \dots x_s$. Pravděpodobnosti výskytu prvků ve zprávě jsou $P(x_i)$. Účinnost zdroje definujeme poměrem skutečně produkované informace k maximálně možné.

Skutečně produkovaná informace: $H(X) = -\sum_i P(x_i)\log P(x_i)$

Maximální informace je produkována pro $P(x_i) = \frac{1}{s}$; $\forall j$

max $H(X) = H_m = \log s$.

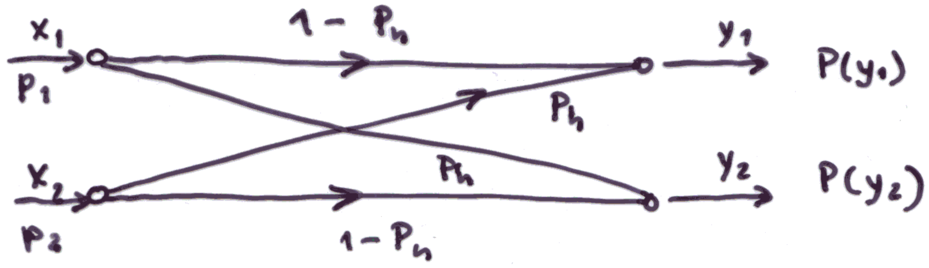
Účinnost $\mu = \frac{H(X)}{H_m} = \frac{H(X)}{\log s}$.

Nadbytečnost (redundance) $R = 1-\mu = 1-\frac{H(X)}{\log s}$.

Podobně lze definovat účinnost a nadbytečnost kódu. Kódování s průměrnou délkou kódových skupin r (průměrný počet míst kódové složky); objem abecedy kódu (základ kódu) z, průměrné informace na jeden prvek kódové složky $\frac{H(X)}{r}$; kde $H(X)$ je entropie nekódovaného zdroje. Maximální možná informace bude v případě stejně pravděpodobných prvků kódu – $H_m = \log z$.

$$\mu = \frac{H(X)}{r H_m} = \frac{H(X)}{r \log z}; \quad R = 1-\mu = 1-\frac{H(X)}{r\log z}.$$

② Stanovte entropii binárního zdroje, který produkuje zprávy tvořené posloupností prvků x_1 a x_2, jejichž pravděpodobnosti výskytu jsou $p_1 = 0.4$ a $p_2 = 1-p_1$. Určeme informaci $I(XY)$ přenesenou binárním kanálem, jestliže pro libovolný prvek je pravděpodobnost chyb $P_h = 0.02$ a pravděpodobnost bezchybného přenosu $(1-P_h)$.



Entropii určíme: $\overline{I(x_i)} = H(X) = -p_1\log_2 p_1 - p_2\log_2 p_2 = -0.4\log_2 0.4 - 0.6\log_2 0.6 = 0.5288 + 0.4422 = 0.9710$ [bit]

$$\left(\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2} = 3.322 \log_{10} x\right)$$

Pro výpočet informace $I(XY)$ určíme podmíněné pravděpodobnosti:

$P(y_j|x_i)$

Ze zadání plyne: $P(y_1|x_1) = 1 - P_h = 0.98$ $\quad P(y_1|x_2) = P_h = 0.02$

$P(y_2|x_2) = 1 - P_h = 0.98$ $\quad P(y_2|x_1) = P_h = 0.02$

Potom lze použít vztah

$$I(XY) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(X|Y) = -\sum_i \sum_j P(x_i y_j) \log P(x_i|y_j)$$

$$H(Y) = -P(y_1)\log P(y_1) - P(y_2)\log P(y_2)$$

kde $P(y_1) = P(x_1 y_1) + P(x_2 y_1) = P(x_1)P(y_1|x_1) + P(x_2)P(y_1|x_2) =$

$= p_1(1-P_h) + (1-p_1)P_h = p_1 + P_h - 2p_1P_h$

$p(y_2) = P(x_1 y_2) + P(x_2 y_2) = 1 - (p_1 + P_h - 2p_1 P_h)$

$$H(Y) = -(p_1 + P_h - 2p_1P_h)\log(p_1 + P_h - 2p_1P_h) - (1 - p_1 - P_h + 2p_1P_h)\log((1 - p_1 - P_h + 2p_1P_h).$$

$$H(Y) = -0.404\log_2 0.404 - 0.596\log_2 0.596 = 0.5283 + 0.4450 = 0.9733\ [bit]$$

dále $H(Y|X) = -\sum_i \sum_j P(x_i)P(y_j|x_i)\log P(y_j|x_i) =$

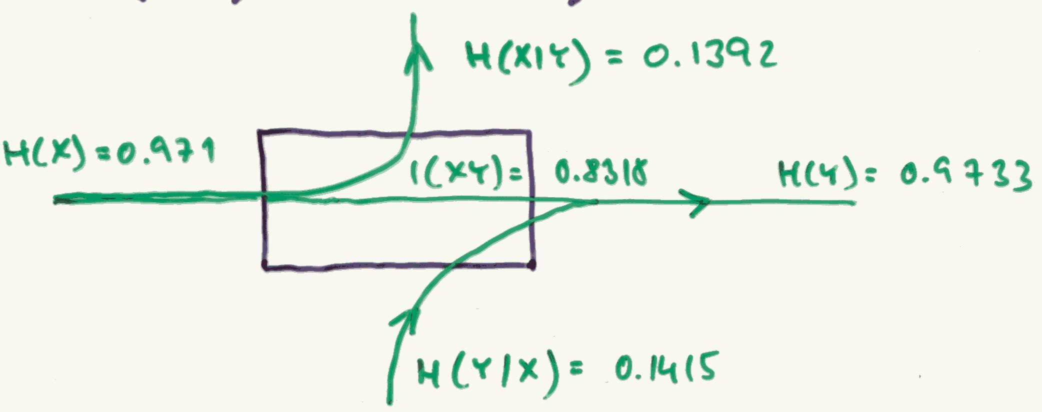
$= -P_h \log P_h - (1-P_h)\log(1-P_h) = -0.02\log_2 0.02 - 0.98\log_2 0.98 = 0.1415\ [bit]$

→ Přenesená užitečná informace bude:

$$I(XY) = H(Y) - H(Y|X) = 0.9733 - 0.1415 = 0.8318\ [bit]$$

ztracená informace

$$H(X|Y) = H(X) - I(XY) = 0.9710 - 0.8318 = 0.1392\ [bit]$$



PROPUSTNOST DISKRÉTNÍHO KANÁLU

je vyjádřena maximálním množstvím informace, které lze přenést daným kanálem za jednotku doby (= maxim. možná rychlost informace)

Průměrná užitečná informace přenesená v jednom přijatém prvku je vyjádřena vzájemnou informací $I(XY)$

τ - časový interval ~~[illegible]~~ zaujatý jedním signálovým prvkem.

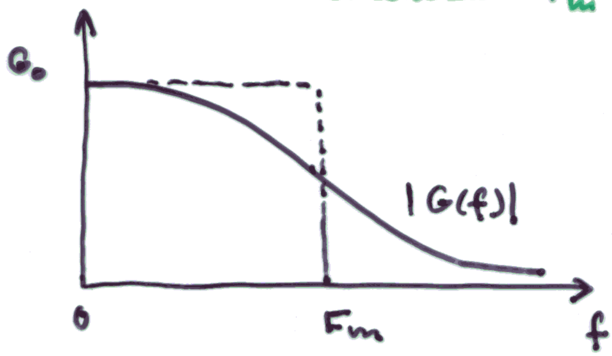
=> za jednotku doby $\frac{1}{\tau}$ prvků --> rychlost přenosu bude $\frac{1}{\tau} I(XY)$.

Propustnost kanálu C je dána maximální hodnotou této rychlosti.

$$C = \max \frac{1}{\tau} I(XY) = \max \frac{1}{\tau} \left[H(Y) - H(Y|X) \right] . \quad [bit/s]$$

τ - souvisí s fyzikálními parametry kanálu

Určení: přenosová charakteristika $|G(f)|$ nechť je nahrazena pravoúhlou charakteristikou ideálního kanálu s mezním kmitočtem F_m.



Podle Nyquistova kritéria pro minimální $\tau \to \tau_0$ dostáváme:

$$\tau_0 = \frac{1}{2F_m} = \frac{G_0}{2\int_0^\infty |G(f)|\,df} \quad . \quad (***)$$

U kanálu, který má charakter souměrné, relativně úzkopásmové propusti, bude potom minimální šířka signálových prvků dána dvojnásobkem hodnoty, určené podle (***). Pro kanál bez rušení:

$$C = \frac{1}{\tau_0} \max I(XY) = \frac{1}{\tau_0} \max H(X)$$

dále H_m je pro $P(x_i) = \frac{1}{s}$ tj. $H(X) = -\sum_{i=1}^{s} P(x_i) \log P(x_i) = \log s$

tj. $C = \frac{1}{\tau_0} \log_2 s = 2F_m \log_2 s \quad [bit/s]$ Mezní rychlost přenosu!

za dobu ΔT: $I_{max} = C\Delta T = 2F_m \Delta T \log_2 s$ pro binární kanál $s=2$

(Gabor: $N = 2F_m \cdot \Delta T$)

Rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti prvků ve zprávě lze dosáhnout vhodným kódováním.

PŘENOS ZA PŘÍTOMNOSTI RUŠENÍ

zavádění další závislosti – přesně definované, – která umožňuje rozpoznat přijímači vzniklou chybu (bezpečnostní kódy)

STANOVENÍ PROPUSTNOSTI KANÁLU V PŘÍPADĚ RUŠENÍ:

PRO STACIONÁRNÍ SOUMĚRNÉ KANÁLY:

rušení působí na určitý prvek (x_k) stejným způsobem, nezávisle na časovém okamžiku tj. $P(y_j|x_i)$ nezávisí na čase!

$$I(XY) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} P(x_i)\,P(y_j|x_i)\log\frac{P(y_j|x_i)}{P(y_j)}.$$

$P(y_j|x_i)$ jsou určeny rušivými poměry v kanálu.

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i)\,P(y_j|x_i).$$

jediné!

Maximalizaci informace lze provést již pouze vhodnou volbou pravděpodobnosti $P(x_i)$ na vstupu kanálu. To lze provést užitím VHODNÉHO KÓDOVÁNÍ.

V obecném případě: $P(y_j|x_i)$ v tabulce:

$$\begin{matrix} P(y_1|x_1) & \dots & P(y_r|x_1) \\ \vdots & & \\ P(y_1|x_s) & \dots & P(y_r|x_s) \end{matrix}$$

Souměrné kanály:

i) budou-li se řádky lišit pouze seskupením týchž číselných hodnot pravděpodobnosti – součet každého řádku bude stejný.
KANÁL SE SOUMĚRNÝM VSTUPEM.

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} P(x_i y_j)\log P(y_j|x_i) = -\sum_{i=1}^{s} P(x_i)\sum_{j=1}^{r} P(y_j|x_i)\log P(y_j|x_i) =$$
$$= -\sum_{j=1}^{r} P(y_j|x_i)\log P(y_j|x_i) = \alpha$$

$$C = \frac{1}{\tau_0}\max I(XY) = \frac{1}{\tau_0}\left[\max H(Y) - \alpha\right]$$

ii) analogicky se liší sloupce → KANÁL SE SOUMĚRNÝM VÝSTUPEM
(při rovnoměrném rozdělení pravděp. prvků na vstupu bude na výstupu rozdělení také rovnoměrné)

bude-li $P(x_i) = \frac{1}{s}$ $\Rightarrow P(y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i)\,P(y_j|x_i) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} P(y_j|x_i) = \text{konst}$

$\Rightarrow P(y_j) = \frac{1}{r}$!

iii) bude-li současně platit i) a ii) $\rightarrow$ OBOUSTRANNĚ SOUMĚRNÝ K.

$$\max H(Y) = -\sum_{j=1}^{r} P(y_j) \log P(y_j) = \log r. \qquad (o)$$

$$C = \frac{1}{\tau_0}\left[\log r - \alpha\right] \quad [\text{bit/s}]$$

$$C = \frac{1}{\tau_0}\left[\max H(Y) - \alpha\right] \qquad (\text{SOUMĚRNÝ VSTUP})$$

Hledáme takové rozdělení na vstupu $P(x_i)$, které povede na rovnoměrné rozdělení $P(y_j)$ na výstupu y_j. platí (o). Pokud ne, budu hledat při jakém $P(y_j)$ bude $H(Y)$ největší.

1. $C \leq \frac{1}{\tau_0}\left[\log r - \alpha\right]$

Obecně: $C = \frac{1}{\tau_0} \max\limits_{P(x_i)} \left[H(Y) - H(Y|X)\right]$ při zadaných pravděpodobnostech $P(x_i)$ a $P(y_j|x_i)$ určíme $H(Y|X)$

$$H(Y|x_i) = -\sum_{j=1}^{r} P(y_j|x_i) \log P(y_j|x_i)$$

a potom $H(Y|X) = \sum\limits_{i=1}^{s} H(Y|x_i)\, P(x_i)$.

PROPUSTNOST SPOJITÉHO KANÁLU:

$I(XY) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X)$ zůstává v platnosti.

$$I(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) \log \frac{w(x,y)}{w(x)\,w(y)}\, dx\, dy$$

$y(t) = x(t) + n(t)$ (šum $n(t)$)

$w(y|x) = w[(n+x)|x] = w(n)$

$$H(Y|X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) \log w(y|x)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, w(y|x) \log w(y|x)\, dx\, dy$$

Entropie je určována pouze tvarem hustoty rozdělení !!

$$H(Y|X) = -\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx}_{1} \int_{-\infty}^{\infty} w(y|x) \log w(y|x)\,dy = -\int_{-\infty}^{\infty} w(n) \log w(n) = H(n)$$

$$C = \frac{1}{T_0} \max \left[H(Y) - H(Y|X) \right] = \frac{1}{T_0} \left[\max_{w(x)} H(Y) - H(n) \right] \qquad (\infty)$$

Určení propustnosti kanálu spočívá v nalezení hustoty $w(x)$, při které nabýde entropie $H(Y)$ maximální hodnoty!

$\boxed{\text{U spojitého signálu vykazuje největší entropii normální rozdělení!}}$

V praktických aplikacích je střední výkon přenášeného signálu omezen. Střední výkon výstupního signálu v případě malého rušení je také omezen.

$$W_y = \overline{y^2(t)} = \sigma_y^2$$
$$W_x = \overline{x^2(t)} = \sigma_x^2$$
$$W_n = \overline{n^2(t)} = \sigma_n^2 \qquad (\text{předpokládáme } \bar{y} = \bar{x} = \bar{n} = 0)$$

$$\max H(Y) = \frac{1}{2} \log 2\pi e \sigma_y^2$$

rovněž $H(n) = \frac{1}{2} \log 2\pi e \sigma_n^2$ a víme u nezávislých procesů $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$

$$\max H(Y) = \frac{1}{2} \log 2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_n^2)$$

a po dosazení do výrazu pro C (∞)

$$C = \frac{1}{2T_0} \log_2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{2T_0} \log_2 \frac{W_x + W_n}{W_n} \qquad [\text{bit/s}]$$