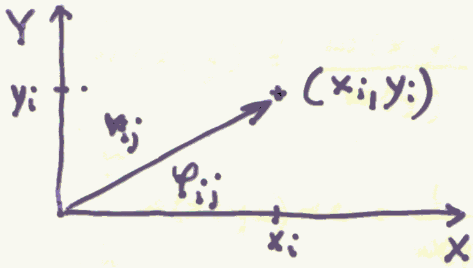
SYSTÉMY NÁHODNÝCH VELIČIN

Děje, výsledek pozorování je charakterizován výskytem dvou nebo více náhodných veličin.

přenos kanálem $x_i \longrightarrow y_i \quad (X, Y)$



náhodný bod, n. vektor

Rozdělení pravděpodobnosti:

$P(X = x_i, Y = y_j) = P(x_i, y_i)$ simultánní pravděpodobnost

(tabulka) $$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} P(x_i, y_i) = 1$$

Známe-li $P(x_i, y_j)$, můžeme určit rozdělení jednotl. náhodných veličin X, Y MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{r} P(x_i, y_i) \; ; \; P(y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i, y_j) \; ; \text{ kde } \sum_{i=1}^{s} P(x_i) = 1 \text{ a} \dots$$

Podmíněné pravděpodobnosti: $P(x_i | y_j) = \dfrac{P(x_i, y_i)}{P(y_j)}$; $P(y_j | x_i) = \dfrac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}$

a platí: $$\sum_{i=1}^{s} P(x_i | y_j) = \sum_{j=1}^{r} P(y_j | x_i) = 1$$

Číselné charakteristiky:

$M(X|y)$ $\quad \bar{X}$ při dané hodnotě $Y = y$ podle definice

$$M[X|y] = \sum_{i=1}^{s} x_i P(x_i|y) = \frac{1}{P(y)} \sum_{i=1}^{s} x_i P(x_i, y)$$

Podmíněná střední hodnota $M[X|y]$ je určena pro každou možnou hodnotu veličiny Y, je funkcí proměnné y. Nazývá se regresí X na Y. Spojnice hodnot $M[X|y]$ pro všechna y je regresní čára. Obecně není její průběh lineární.

APROXIMACE regresní čáry přímkou (minimalizace metodou nejm. □)

→ regresní přímka (lineární regrese)

Obdobně jako $M[X|y]$ definujeme i další podmíněné momenty:

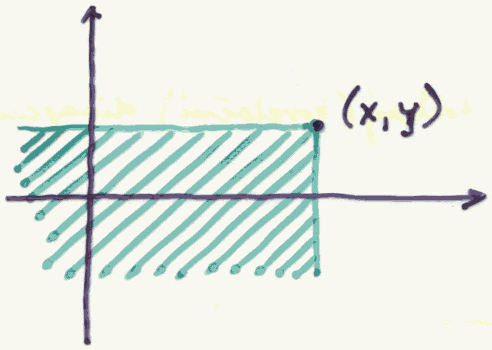
rozptyl $D[X|y]$ .... x_i^2 ...

Rozdělení dvou spojitých náh. veličin.

Simultánní distribuční funkce $F(x,y) = P[X<x, Y<y]$

$F(x,\infty) = F(x)$

$F(\infty,y) = F(y)$



Plocha $F(x,y) = \dots$

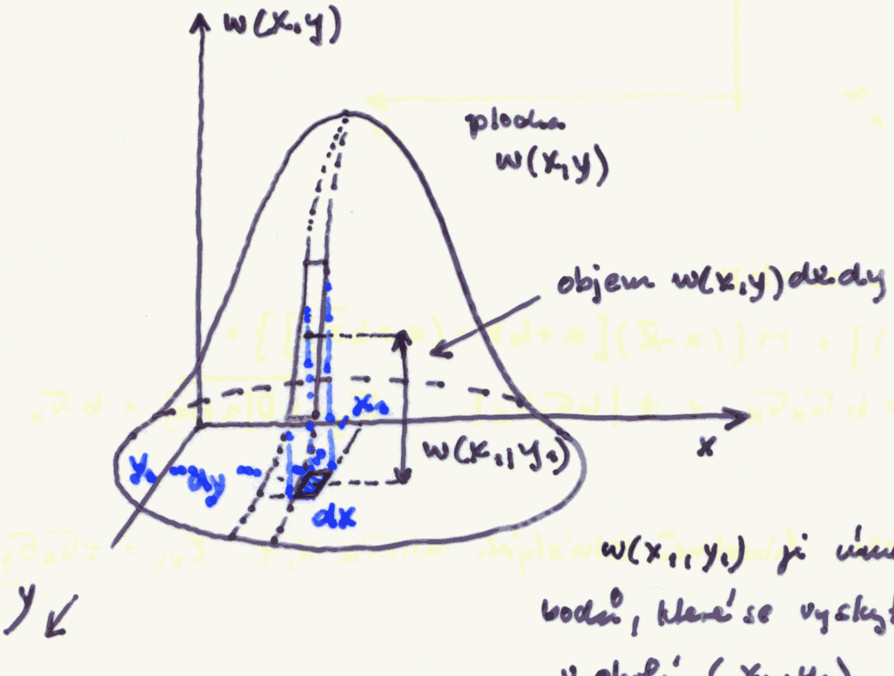
$F(x,-\infty) = 0$ $\quad F(-\infty,-\infty) = 0$

$F(-\infty,y) = 0$ $\quad F(\infty,\infty) = 1$

dvourozměrná distribuční funkce.

simultánní hustota rozdělení: $w(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} w(x,y)\,dx\,dy.$$



$w(x_1,y_1)$ je úměrné hustotě náhodných bodů, které se vyskytnou na plošce $dx\,dy$ v okolí (x_1,y_1)

Pravděpodobnost výskytu náhodného bodu (x,y) v dané oblasti (ploše) D je dána objemem tělesa ležícího nad D, jehož "horní" povrch je tvořen příslušnou částí povrchu $w(x,y)$.

$$P[x,y \subset D] = \iint_D w(x,y)\,dx\,dy.$$

$$w(x|y) = \frac{w(x,y)}{w(y)}$$ **podmíněná hustota**, je funkcí jedné proměnné x, při dané určité hodnotě y.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x|y_a)\,dx = \frac{1}{w(y_a)} \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y_a)\,dx = \frac{w(y_a)}{w(y_a)} = 1$$

Momenty rozdělení:

obecný moment řádu $(k+r)$ rozdělení náhodných veličin (X,Y) je dán střední hodnotou součinu $(X^k Y^r)$

$$M[X^k Y^r] = \overline{X^k Y^r} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{q} x_i^k y_j^r \, P(x_i, y_j)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r w(x,y)\,dx\,dy.$$

$$\mu_{kr} = (\overset{\circ}{X}{}^k \overset{\circ}{Y}{}^r) = \overline{(X-\bar{X})^k (Y-\bar{Y})^r} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{q} (x_i - \bar{X})^k (y_j - \bar{Y})^r P(x_i, y_j)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})(y-\bar{Y})\,w(x,y)\,dx\,dy$$

V praktických aplikacích se nejčastěji pracuje s 5 číselnými char.

$\bar{X}$, $\bar{Y}$, σ_x^2, σ_y^2, K_{xy}

rozptyly   kovariance

$M[X^1Y^0] = \overline{X^1Y^0} = \bar{X}$ $\qquad P(x_i, y_i)$!

$\mu_{20} = \overline{(X-\bar{X})^2(Y-\bar{Y})^0} = \overline{(X-\bar{X})^2} = \sigma_x^2$ $\qquad$ pozor $w(x,y)$!

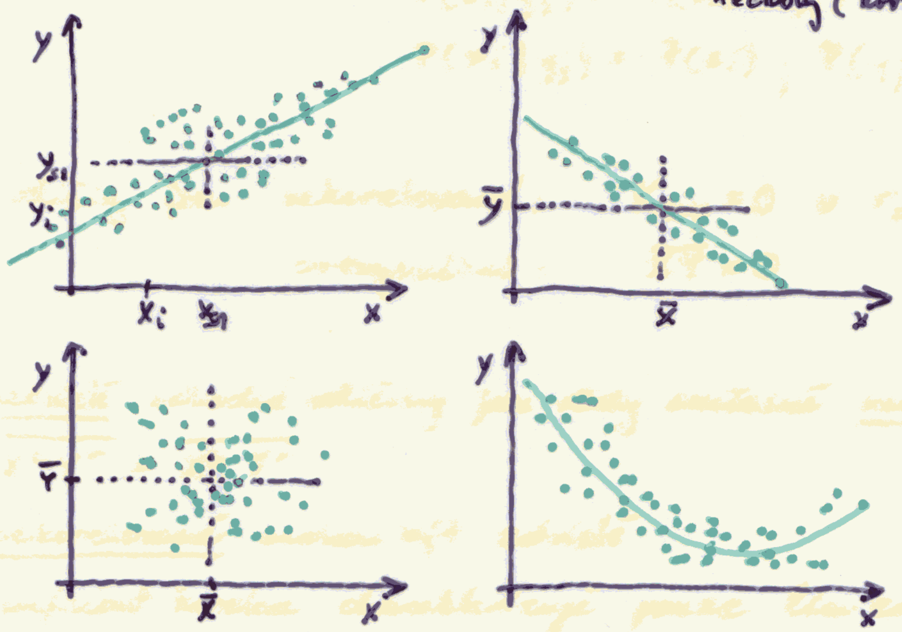
$K_{xy} = \mu_{11} = \overline{\mathring{X}\mathring{Y}} = \overline{(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}$

$\overline{XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}} = \overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}$

(MOMENT VAZBY, KORELAČNÍ MOMENT)

Závislost náhodných veličin:

tečkový (korelační) diagram.



lineární korelace

Kovariance, jestliže $y = a + bx$

$K_{xy} = M[(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})] = M\{(X-\bar{X})[a+bX-(a+b\bar{X})]\} =$

$= b(\overline{X^2} - \bar{X}^2) = b\sigma_x\sigma_x = \pm|b\sigma_x\sigma_x|$ $\qquad \sigma_y = \sqrt{D[a+bx]} = b\sigma_x$

kovariance ~~lineárně~~ lineárně závislých veličin X, Y $\quad K_{xy} = \pm\sigma_x\sigma_y$

Koeficient korelace:

$$r_{x,y} = M\left[\frac{X-\bar{X}}{\sigma_x}\,\frac{Y-\bar{Y}}{\sigma_y}\right] = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

normovaný korelační moment.

Nezávislé náh. veličiny: $F(x,y) = F(x)\cdot F(y)$

$$P[(X<x),(Y<y)] = P[X<x]\cdot P(Y<y)$$

$$w(x,y) = w(x)\,w(y)$$

$$P(x_i,y_j) = P(x_i)\,P(y_j)$$

$$P(x_i|y_j) = P(x_i)\;;\quad P(y_j|x_i) = P(y_j)$$

náh. veličiny jsou nekorelované: $K_{xy} = 0$ v $r_{xy} = 0$

ortogonální: $\overline{XY} = 0$

a) nezávislé náhodné veličiny jsou vždy současně nekorelované a ortogonální

$\overline{X^k Y^r} = \overline{X^k}\;\overline{Y^r}$

b) nekorelované mohou být závislé

(koeficient korelace charakterizuje pouze lin. závislost)

$K_{xy} = 0$ $r_{xy} = 0$ a také $\overline{XY} = \bar{X}\bar{Y}$; neplatí $\overline{X^k Y^r} = \overline{X^k}\;\overline{Y^r}$!

Jsou-li X, Y nekorelované, $\overline{\mathring{X}\mathring{Y}} = 0$ $\Rightarrow$ $\mathring{X}$ a $\mathring{Y}$ jsou ortogonální

c) X, Y jsou ortogonální $\Rightarrow$ $\overline{(X+Y)^2} = \overline{X^2} + \overline{Y^2}$

(pokud X, Y jsou nekorelované a $\bar{X}$ v $\bar{Y} = 0$ $\Rightarrow$ jsou ortogonální)

d) nekorelované: Rozptyl součtu se rovná součtu rozptylů jedn. vel.

$$D[X+Y] = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2K_{xy} \qquad \overline{(\mathring{X}+\mathring{Y})^2} = \overline{\mathring{X}^2} + \overline{\mathring{Y}^2} + 2\overline{\mathring{X}\mathring{Y}}$$

e) $\overline{XY} = \bar{X}\,\bar{Y} + K_{xy}$

f) pokud X a Y mají normální rozdělení $\Rightarrow$

nekorelovaný znamená zároveň nezávislý

PŘÍKLAD:

$$w(x,y) = w(x)\,w(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x} - \frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y}\right]$$

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\bar{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

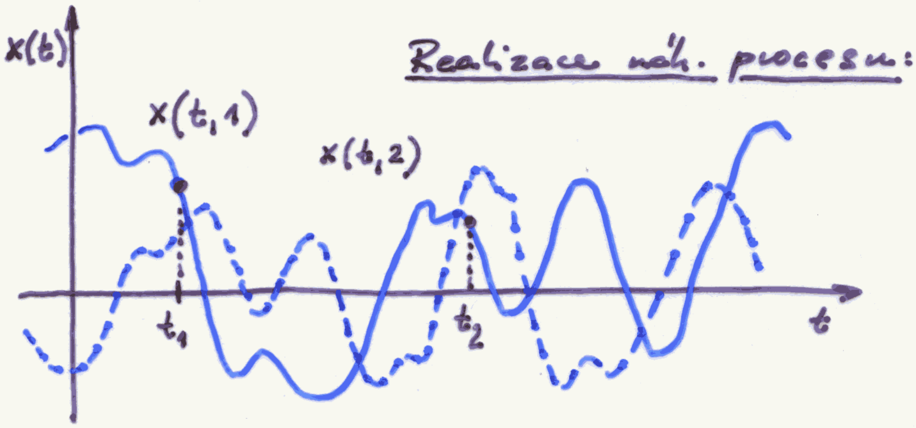
NÁHODNÉ PROCESY (STOCHASTICKÉ)

rozšíření teorie pravděpodobnosti na sledování a popis náhodných veličin měnících se podle nenáhodného parametru — nejčastěji času

Výsledkem jednoho pozorování → náhodného procesu je jeden konkrétní časový průběh (časová funkce): realizace náhodného procesu.

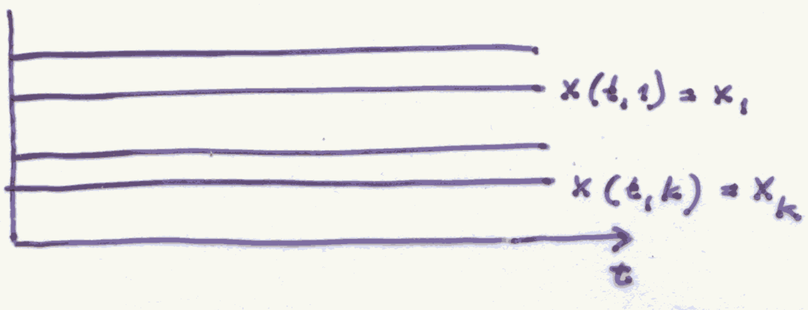
Analogicky náhodné veličině je náhodný proces charakterizován množinou <u>všech možných</u> časových průběhů - realizací sledovaného náh. procesu.

Příklady: sdělovací signály
rušivé procesy (šumy) (tepelný šum odporu)
napětí, množina rezistorů R



Ze znalosti průběhu do doby t_1 nemůžeme určit hodnotu v čase t_2.
Jsme nuceni používat určité charakteristiky, vyjadřující průměrné vlastnosti sledovaného signálu.
Jejich soubor nazýváme STATISTIKA SLEDOVANÉHO PRŮBĚHU

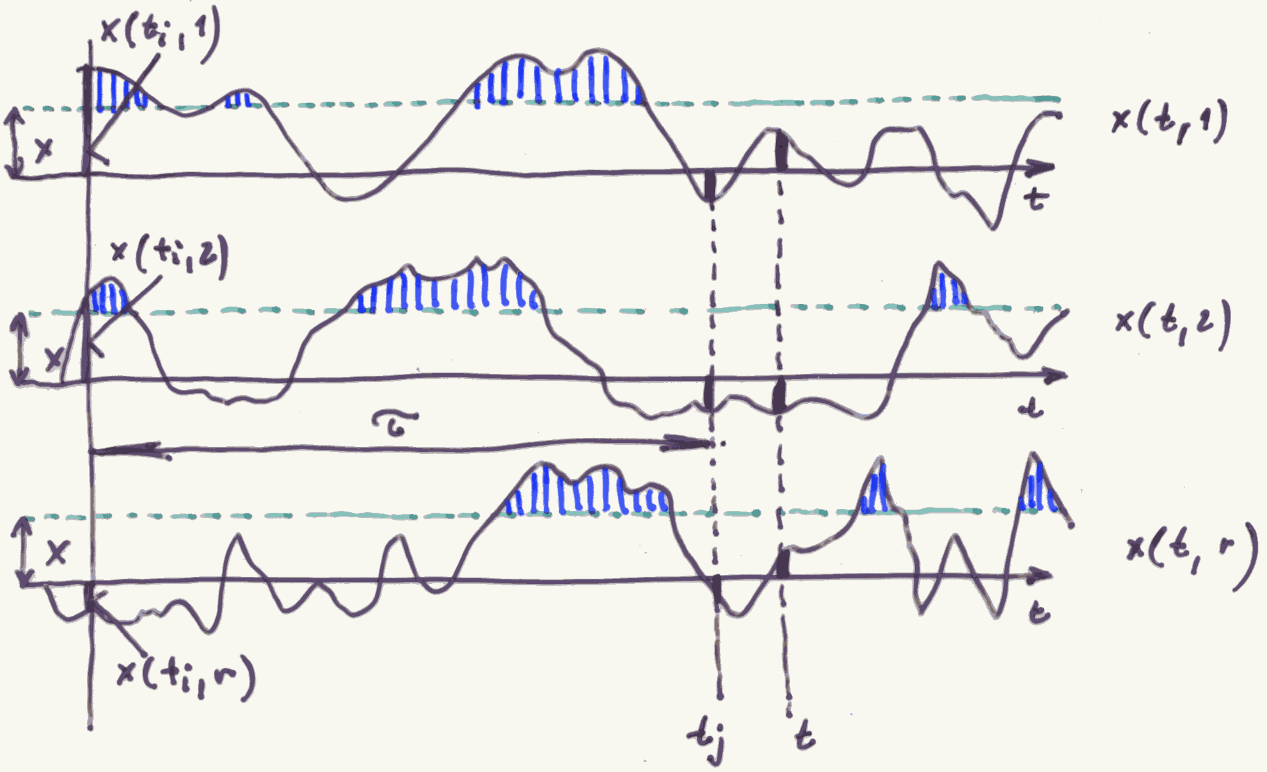
Příklad 1



Příklad 2

$$x(t,r) = A_r \sin \omega_r t + \varphi_r$$

Pozorováním náhodného procesu, tj množiny jeho realizací v určitém časovém okamžiku t_i získáme množinu diskrétních hodnot (číselných), které budou dány okamžitými hodnotami $x(t_i, r)$ jednotlivých realizací v okamžiku t_i.



<u>Obr:</u> Řez množinou realizací náhodného procesu.

V <u>každém řezu</u> t_i máme pro dané hodnoty zavést <u>hustotu rozdělení</u> pravděpodobnosti, <u>integrální funkci</u> a <u>momenty rozdělení</u>

Zvolíme-li více řezů ... $t_1, t_2, \dots t_n$,
veličiny $x(t_1), x(t_2), \dots x(t_n)$ tvoří systém n náhodných veličin.

více řezů $\longrightarrow$ podrobnější poznatky o náhodném procesu

Pro vyjádření základních vlastností procesu:
t_i ; (t_i, t_j) ; (t_i, t_j, t_k) ... atd.

STATISTIKA NÁHODNÉHO PROCESU

integrální funkce rozdělení:

$F(x,t) = P[x(t) < x]$ pravděpodobnost, že v nějakém zvoleném časovém okamžiku t leží okamžitá hodnota náhodného procesu (množiny realizací) pod zvolenou úrovní x.

hustota rozdělení pravděpodobnosti: $w(x,t) = \dfrac{dF(x,t)}{dx}$

"Praktické" určení hodnoty distribuční funkce:

počet realizací ... N sledovaného náh. procesu $x(t)$,

celkový počet realizací $N(x,t)$, jejichž hodnota ve zvol. okamžiku t je menší, než zvolená úroveň x

Na základě četnosti $\rightarrow$ $F(x,t) = P[x(t) < x] \doteq \dfrac{N(x,t)}{N}$

Dvourozměrná dist. funkce:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[x(t_1) < x_1, \; x(t_2) < x_2]$$

$\uparrow$ pravděpodobnost složeného jevu ... funkce 4 proměnných

$$w(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$P[(x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1);(x_2 < x(t_2) < x_2 + dx_2)] = w(x_1, x_2, t_1, t_2) \cdot dx_1 \, dx_2$$

Střední hodnota:

ve zvoleném okamžiku t: $\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, w(x,t) \, dx = \mu(t)$ (!)

Rozptyl

$$D[x(t)] = \overline{[x(t) - \overline{x(t)}]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(t)]^2 \, w(x,t) \, dx = \sigma_x^2(t)$$

Obecně jsou obě charakteristiky různé v jednotlivých časových okamžicích.

KOVARIANCE

<u>Kovarianci</u> můžeme definovat při uvážení dvou řezů v okamžicích t_1 a t_2:

$$K(t_1, t_2) = \overline{[x(t_1) - \mu(t_1)][x(t_2) - \mu(t_2)]} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\; w(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 \,.$$

$$\mu_i = \mu(t_i)$$ [redacted]

<u>Koeficient korelace:</u>

$$r(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\,\sigma(t_2)} \,.$$

Obě charakteristiky $K(t_1, t_2)$ a $r(t_1, t_2)$ jsou obecně závislé na volbě okamžiků t_1 a t_2.

Vyjadřují míru lineární závislosti mezi okamžitými hodnotami náhodného procesu (množiny realizací) v okamžicích t_1 a t_2.
U náhodných veličin je kovariance vyjádřena <u>diskrétní číselnou</u> hodnotou, u náhodných procesů bude funkcí proměnných t_1, t_2.

Přesnější je zde termín **kovarianční**, přesn. **autokovarianční funkce**

Korelační funkce (autokorelační funkce) procesu $x(t)$

$$R(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)\, x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\; w(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

$$K(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \mu(t_1)\,\mu(t_2)$$

DVA RŮZNÉ NÁHODNÉ PROCESY:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)\, y(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\; w(x, y, t_1, t_2)\, dx\, dy$$

$$K_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x(t_1)\, \mu_y(t_2)$$

Funkce vyjadřují míru závislosti mezi okamžitými hodnotami procesu $x(t)$ v okamžiku t_1 a $y(t)$ v okamžiku t_2.

KORELAČNÍ FUNKCE má v teorii náhodných procesů základní význam. Vyjadřuje vnitřní strukturu náhodného procesu, je mírou závislosti mezi různými náhodnými procesy a protože je charakteristikou vyššího řádu, můžeme z ní určit charakteristiky nižšího řádu (střední hodnotu, rozptyl). Pomocí korelační funkce můžeme vyjádřit spektrální vlastnosti náhodného procesu.