# POMĚR SIGNÁL / ŠUM

Kelvinův návrh rychlého přenosu: zrcátkový galvanometr s nulou uprostřed, 13 písmen po obou stranách – oabčr 13 kladných a 13 zdporných úrovní napětí → pomaly, rozlišení úrovní

Počet $s$ možných stavů ve vztahu pro informační objem $I = n \log s$ závisí na poměru signálu k rušení (šumu)

① v teoretických úvahách je lépe pracovat s výkonem

② zabýváme-li se náhodným šumem, pracujeme se statistickými vlastnostmi průměrných kvadratických hodnot

Vyjádření slova jediným impulsem o dané amplitudě:

"NO $| - \cdot | - - - |$ $\cdot = 1$ ; $- = 111$ mezera v písmenu 0, mezi písmeny 000

↳ 111 0 1 000 111 0 111 0 111 resp. 477 147 (přesnost jedné půlmiliontiny)

## SHANNON-HARTLEYŮV ZÁKON

Ukážeme, že počet rozlišitelných úrovní výkonu je úměrný poměru maximálního výkonu signálu $P$ ke střední hodnotě výkonu šumu $N$:

počet úrovní $= K\left(1 + \frac{P}{N}\right)$ (nulová úroveň je přípustná!)

$0, N, 2N, \dots P$

Vzorec pro informaci vychází z úrovní amplitud $I = n \cdot \log s$, jelikož výkon v čtverci amplitudy – vyjdeme z toho, že počet úrovní $s$ je prakticky

$s = \sqrt{1 + P/N}$ (Shannonův důkaz později)

počet impulsů, které lze přenést za dobu $T$ kanálem o šířce pásma $W$ ... $n = 2TW$

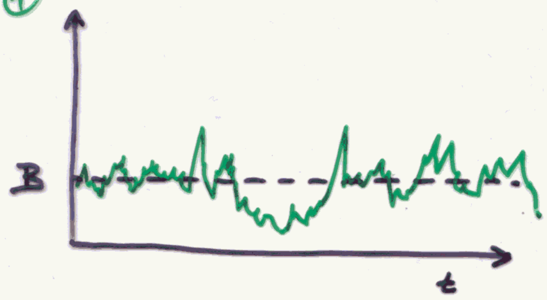
$$I = n \cdot \log s = 2TW \log \sqrt{1 + \frac{P}{N}} = TW \log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

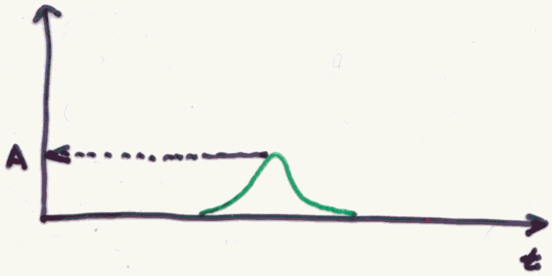
Informační kapacita kanálu vztažená k jednotce času (rychlost přenosu)

$$C = \frac{I}{T} = W \log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

Shannon – Hartleyův zákon

①




Náhodný šum s průměrnou amplitudou B

Impulsový signál s amplitudou A

Přijímame-li signál se šumem, je pravděpodobné, že v něm zanikne. Předpokládejme, že signál se bude Mx opakovat tak, aby se výstupní signály detektoru při každém opakování sčítaly → místo zachyceného signálu bychom využili výsledek tohoto postupu. Impulsové signály se vesměs sečtou → výsledná amplituda bude MA, zatímco postupné údaje náhodného šumu se sloučí tak, že se sečtou (v průměru) pouze jejich čtverce → dostaneme efektivní hodnotu $(M \cdot B^2)^{1/2}$. Tím se původní poměr šumu $\frac{A}{B}$ zlepší na hodnotu $\sqrt{M} \cdot \frac{A}{B}$.
Zvětšování M ovšem vyžaduje delší čas, nebo zvětšení šířky pásma.

Průměrná amplituda výsledného (průběhu) signálu složeného ze A a náhodného šumu B bude $(A^2+B^2)^{1/2}$, takže pomocí kódování, kdy se každé složce zprávy přiřadí celá skupina impulsových signálů, dosáhneme toho, aby přijímač pracoval s průměrnými a nikoliv okamžitými hodnotami. $A^2$ a $B^2$ jsou úměrné hodnotám P a N. (výsledek je v souladu se S-H zákonem)

② Proč je K = 1 (?), pokud se jedná o náhodný (bílý) šum.

Na základě opakovaných okamžitých hodnot nelze možno stanovit jaká je skutečná úroveň signálu.

průměr výrazů $(A+B)^2$ a $(A-B)^2$ je $A^2 + B^2 > A^2$

Sousední úrovně výkonu signálu nemohou být voleny tak, aby se od sebe nelišily více než o hodnotu výkonu šumu, z čehož vyplývá, že konstanta $K \to 1$   [počet úrovní výkonu $= K(1+\frac{P}{N})$]

## ROZLOŽENÍ VÝKONU SIGNÁLU PO ŠÍŘCE PÁSMA:

**Poznatek:**

Při použití větší šířky pásma postačí menší poměr signál/šum.

(viz kmitočtová modulace, různé druhy PCM prakticky)

V zásadě lze zmenšit šířku pásma (v telefonii) na úkor šumového poměru

(vzor: kanál nemůže mít menší šířku pásma, než původní zpráva.

Zmenšování šířky pásma nepostupuje s $\log \frac{P}{N}$ ale právě s $\log \frac{P+N}{N}$

(podstatně pomaleji!)

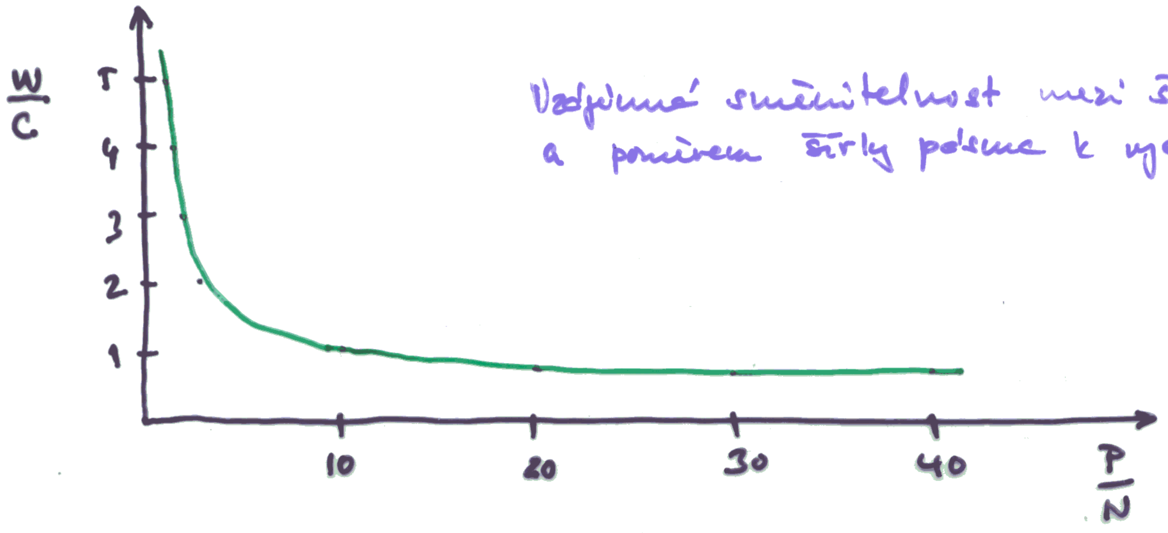
Uvažujme šířku pásma

→ Pro $\frac{P_0}{N} = 10$   $\log_e (1 + \frac{P_0}{N}) = \log_e 11 = 2.3979$

→ potom při nezměněné úrovni šumu bude po zmenšení šířky pásma na polovinu zapotřebí nového výkonu $P_1$, při kterém bude

$\log_e (1 + \frac{P_1}{N}) = 4,7958$   => výkon 16x vyšší

$P_1 = 16 P_0$




Vzájemná směnitelnost mezi šumovým poměrem a poměrem šířky pásma k rychlosti přenosu

Pomocí daného výkonu lze přenést maximální množství informace tehdy, je-li výkon časově rozložen tak, že na každý úsek, nebo interval impulsu připadá v průměru jedna jednotka výkonu, čemuž se prakticky blíží případ $S=2$.* Protože zpráva má skoro vždy více než 2 amplitudové úrovně, je v zájmu hospodárnosti vhodné kódování do signálu o menším počtu úrovní a širším kmitočtovém pásmu. (*plyne z teorie) ☹

Předpokládejme nějaký vztah mezi $\frac{P}{N}$ a $W$.

Ve skutečnosti $N \sim W$

$\overline{U_s^2} = 4kTR\Delta f$ resp $\overline{I^2} = 2e\bar{I}\Delta f$ (Johnsonův vzt., r. výstřelový - Schottkyho)

vyjádření pomocí "ekvivalentní teploty" zjištěné! (i pro vyzařovací odpor antény.)

$N = N_0 \cdot W$ $N_0$ – š. výkon na jednotku šířky pásma

$$\rightarrow C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

Jelikož $P, N_0$ jsou dané, lze najít $W$ takové, aby $\frac{C}{W}$ bylo maximální.

Zavedeme účinnost přenosu informace

$$\eta = \frac{C}{W} = \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

$$\frac{d\eta}{dW} = \frac{1}{W} \cdot \frac{\frac{P}{N_0 W}}{1 + \frac{P}{N_0 V}}$$ (s rostoucím $W$ se $\eta$ zmenšuje!)

Zvětšením výkonu při dané šířce pásma se dá zvýšit rychlost přenosu. Na jednotku šířky pásma připadne větší rychlost přenosu, pokud výkon, který máme k dispozici, soustředíme do úzkého pásma.

Shannon: mezní $W_0$; $N_0 W_0 = P$, jakým způsobem závisí $\frac{C}{W_0}$ na $W$

☺ ...... $\rightarrow \frac{C}{W_0} \doteq 1$ pro $W \gg W_0$

$\Rightarrow$ Mezní hodnotou $C$ je přirozená jednotka /s tj. 1,443 bit/s na jednotku $W_0$ šířky pásma tj. $\boxed{C_m = 1{,}443\ (\text{bit}/s)\, W_0}$

$$C_m = 1.443 \cdot \frac{P}{N_0}$$

## ENTROPICKÝ VÝKON ŠUMU

Tepelný šum (náhodný „bílý")

entropie Gaussova rozdělení: $H = -I = \log_e \sqrt{2\pi e N}$

N – výkon šumu

$\sqrt{N}$ v roli $\sigma$

$$N_1 \stackrel{d.f.}{=} \frac{1}{2\pi e} \cdot e^{2H} \quad *$$ entropický výkon

Entropický výkon se rovná skutečnému neboli středně-kvadratickému výkonu pouze v případě náhodného šumu ⟶ U ostatních průběhů je $N_1 < \overline{x^2}$

⟹ NÁHODNÝ ŠUM SE ODDĚLUJE OD SIGNÁLU OBTÍŽNĚJI NEŽ ŠUM OBSAHUJÍCÍ NĚJAKÝ PEVNĚ URČENÝ ČASOVÝ PRŮBĚH (⟶ V DŮSLEDKU MÁ MENŠÍ ENTROPII!)

Impulsní rušení lze potlačit omezováním amplitudy!

## ENTROPIE ZPRÁVY SMÍŠENÉ SE ŠUMEM.

Pokud šum není náhodný, nelze utvořit rovnici *. Shannon stanovil horní i dolní mez kapacity kanálu se šumem libovolného druhu

skutečný výkon šumu: $N$ — obě meze konvergují k této hodnotě.

entropický " " : $N_1$ ⟹ $C \doteq W \log \frac{P+N}{N_1}$. – převládá P


pilový průběh

$N_1 < N$

$$p(x) = \frac{dx}{X}$$

$$H = -\int_0^X \frac{1}{X} \log \frac{1}{X}\, dx = -\log\frac{1}{X} = \log X$$ tj. $N_1 = \frac{1}{2\pi e} e^{2H}$; $2H = 2\log X = \log X^2$

$$\Rightarrow N_1 = \frac{X^2}{2\pi e}.$$

zatímco $N = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{X^2 t^2}{T^2}\, dt = \frac{1}{3} X^2$ $\qquad \frac{N}{N_1} = 5{,}7$