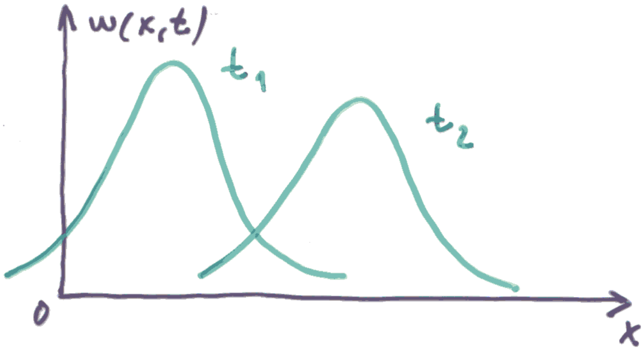
STACIONÁRNÍ NÁHODNÉ PROCESY

$w(x,t)$ $\qquad w(x,t_1) \neq w(x,t_2)$ obecně

<u>nestacionární</u>



Třída náhodných procesů, jejichž funkce rozdělení libovolného řádu jsou časově INVARIANTNÍ, tj. nezávislé na volbě počátku času.

Pokud to platí pro funkci rozdělení libovolného řádu →

STACIONÁRNÍ V PŘESNÉM (UŽŠÍM) SMYSLU.

⇒ proces musí existovat v neomezeném časovém intervalu.

$$\Rightarrow \quad w(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_n) = w(x_1, x_2, \dots x_n, t_1+t_0, t_2+t_0, \dots t_n+t_0)$$

→ hustota rozdělení prvého řádu stacionárního procesu

$w(x,t) = w(x, t+t_0) = w(x)$ <u>nezávisí na čase</u>

→ dvourozměrná hustota rozdělení nebude záviset na volbě počátku odčítání času (umístění dvojice t_1 a t_2 na časové ose) bude záviset pouze na časové diferenci mezi t_1 a t_2, $\tau = t_2 - t_1$:

$$w(x_1, x_2, t_1, t_2) = w(x_1, x_2, t_1+t_0, t_2+t_0) = w(x_1, x_2, t_2-t_1) =$$
$$= w(x_1, x_2, \tau) = \underline{w(x, x_\tau, \tau)}$$

Stacionární náhodný proces v <u>přesném smyslu</u> $\Leftrightarrow$
má funkci rozdělení 1. řádu časově nezávislou,
funkce rozdělení vyšších řádů závisí pouze na časových diferencích mezi uvažovanými řezy,

! $w(x)$ určíme z libovolného z ekvivalentních řezů
! $w(x_1, x_2, \tau)$ z libovolné jediné dvojice řezů s diferencí τ

Pravděpodobnostní charakteristiky stacionárních náh. procesů:

Střední hodnota: $\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x)\, dx = \mu.$

Rozptyl: $D[x(t)] = \overline{[x(t)-\mu]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, w(x)\, dx = \sigma^2.$

Korelační funkce: $R(\tau) = \overline{x(t)\, x(t-\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, x_\tau\, w(x, x_\tau, \tau)\, dx\, dx_\tau.$

Koeficient korelace: $r(\tau) = \dfrac{K(\tau)}{\sigma^2} = \dfrac{R(\tau)-\mu^2}{\sigma^2}.$

Odchylka náhodného procesu od jeho střední hodnoty se nazývá FLUKTUACE : $\mathring{x}(t) = x(t) - \overline{x(t)}$

Kovarianční funkce $K(\tau)$ $\rightarrow$ korelační funkce fluktuací náhodného procesu.

Sledování náhodných procesů pomocí charakteristik prvého a druhého řádu (střední hodnota, rozptyl, korelační funkce) $\rightarrow$
KORELAČNÍ TEORIE jediný způsob, dosud dostatečně a široce propracovaný. (STACIONÁRNÍ PROCESY V ŠIRŠÍM SMYSLU)

ČASOVÉ STŘEDNÍ HODNOTY

dosud uvedené charakteristiky reprezentují
STŘEDNÍ HODNOTY "NAPŘÍČ PROCESU".

V praxi u časových průběhů (napětí ...) určujeme stejnosměrnou složku jako střední hodnotu z jediného časového průběhu $u(t)$:

$$U_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\,dt,$$

t_1 – zvolený počátek pozorování, T – délka intervalu.
U_0 – časová střední hodnota.

Časovou střední hodnotu u náhodného procesu zavádíme, s ohledem na základní vlastnost stac. náh. procesu – neomezené trvání v čase:

$$x_0 = \widetilde{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,dt,$$

kde $x(t)$ je průběh jedné realizace; T – interval pozorování!

Časová střední hodnota n-tého řádu:

$$\widetilde{[x(t)]^n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^n(t)\,dt.$$

$$\widetilde{x(t)\,y(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,y(t-\tau)\,dt.$$

(časová vzájemná – křížová – korelační funkce realizací $x(t)$ a $y(t)$.)

$$\widetilde{x(t)\;x(t-\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,x(t-\tau)\,dt$$

časová autokorelační funkce realizace $x(t)$.

Časová střední hodnota druhého řádu:
(kvadratická střední hodnota)

$$W_1 = \widetilde{[x(t)]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$$

Bude-li $x(t)$ průběh napětí či proudu na libovolném odporu R,
$x^2(t)$ .. okamžitý výkon
a W_1 .. střední výkon realizace na odporu 1Ω.
Na odporu R

$$W_R = \frac{1}{R} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt.$$

$x(t)$ ... napětí, $y(t)$ ... proud, na téže impedanci Z
časová vzájemná korelační funkce pro $\tau \to 0$ vyjadřuje střední výkon ztracený na této impedanci

$$W_2 = \widetilde{x(t)\,y(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\,y(t)\,dt.$$

$$\sigma^2 = \widetilde{[x(t) - x_0]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t) - x_0]^2\,dt, \quad \text{kde } x_0 = \widetilde{x(t)}.$$

střední výkon proměnné složky realizace $x(t)$ na odporu 1Ω.

$$\sigma^2 = \widetilde{[x(t) - x_0]^2} = \widetilde{x^2(t)} - 2\widetilde{x(t)}x_0 + \widetilde{x_0^2} = \widetilde{x^2(t)} - x_0^2 = W_1 - x_0^2$$

$\sigma = \sqrt{\widetilde{[x(t) - x_0]^2}}$ – efektivní napětí na uvažovaném odporu R (proměnné složky)

$W = \dfrac{\sigma^2}{R}$ výkon proměnné složky na odporu R

ERGODICKÉ NÁHODNÉ PROCESY

při sledování jednoho řezu dostatečného množství realizací se projeví všechny možné stavy procesu ve stejných poměrech, v jakých se projeví při pozorování jedné, dostatečně dlouhé, realizace tohoto procesu.

Řez .... $x(r)$ $r = 1, \dots n$

$x(t, r)$

časová realizace $x(k)$ $k = 1, \dots m$

$x(t, k)$ v diskrétních okamžicích $t = t_k$.

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{r=1}^{n} x(r) \qquad \text{pro } n \to \infty \qquad \overline{x(t)}$$

$$\frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} x(k) \qquad \text{pro } m \to \infty \qquad \widetilde{x(t)}$$

tj. s pravděpodobností blížící se jedné platí rovnosti

$$\frac{1}{n} \cdot \sum^{n} x(r) = \frac{1}{m} \sum^{m} x(k) \quad \text{nebo v limitě} \quad \overline{x(t)} = \widetilde{x(t)}.$$

Stacionární náhodný proces je ERGODICKÝ, jestliže časová střední hodnota, určená z jedné realizace dostatečně dlouhého trvání, je s pravděpodobností blížící se jedné rovna odpovídající střední hodnotě určené z řezu množinou realizací procesu

$$\sigma^2 = \widetilde{[x(t) - x_0]^2} = \overline{[x(t) - x_0]^2}$$

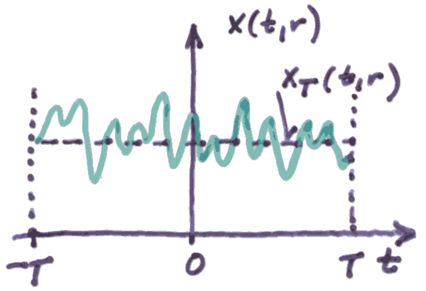
$$R(\tau) = \widetilde{x(t)\, x(t-\tau)} = \overline{x(t) x(t-\tau)}$$

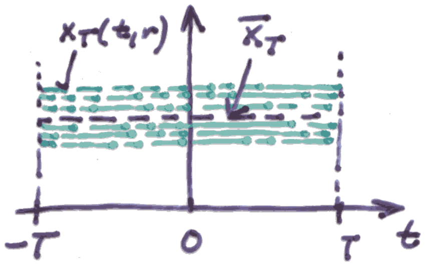
Přesné vyjádření podmínek ergodicity je poměrně složité. Jednou z nich je, aby rozptyl časových středních hodnot jednotlivých realizací $\widetilde{x_T}(t, r)$ limitoval s rostoucím T k nule.

Časová stř. hodnota

$$\widetilde{x_T(t,r)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t,r)\,dt$$

nabývá pro různé realizace $x_T(t,r)$ různých hodnot, je náhodnou veličinou.





$$\overline{x_T} = \overline{\widetilde{x_T(t,r)}} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{x_T(t,r)}\,dt = \overline{x(t)}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}dt = \overline{x(t)}$$

Bude-li rozptyl hodnot $\widetilde{x_T(t,r)}$ v limitě pro $T\to\infty$ konvergovat k nule, s pravděpodobností $\to 1$ $\quad \overline{x(t)} = \widetilde{x(t,r)} = \widetilde{x(t)}$

další podmínka ergodičnosti: $\quad \lim\limits_{\tau\to\infty} R(\tau)=0$

(S rostoucím τ klesá korelace mezi hodnotami $x(t)$ a $x(t-\tau)$ k nule)

Experimentální stanovení charakteristik erg. n. p.:

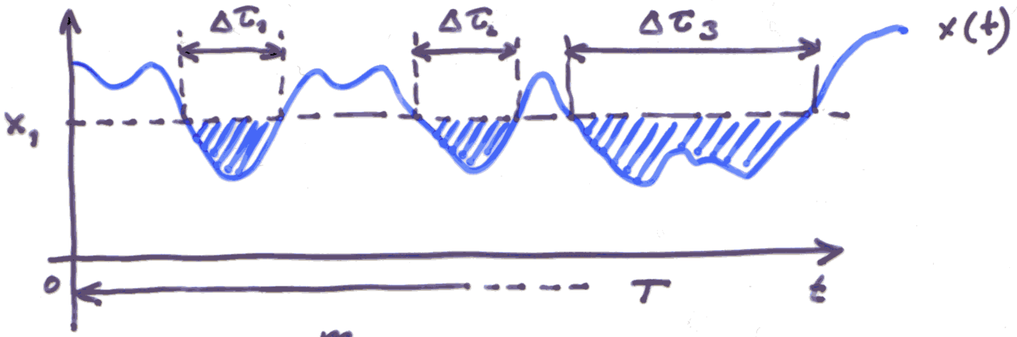
$$\widetilde{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(t_k)$$

$$R(\tau) = \widetilde{x(t)\,x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{N-n_k}\sum_{k=1}^{N-n} x(t_k)\,x(t_k+\tau)$$

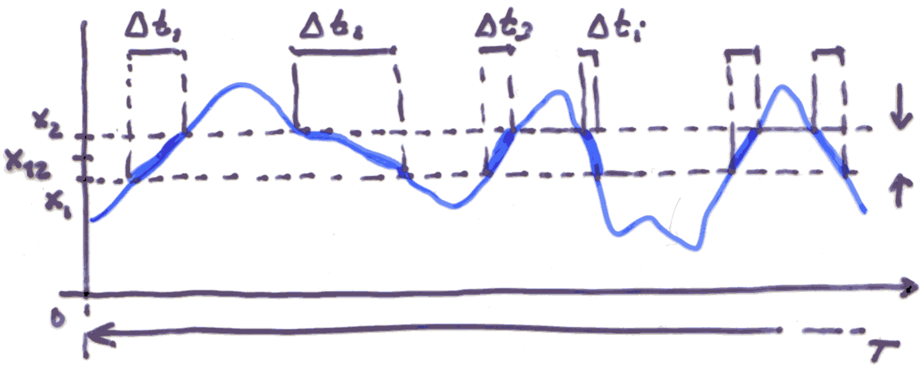
$$\Delta t = t_{k+1}-t_k \qquad \tau = n\cdot\Delta t$$

$$\sigma^2 = \widetilde{[x(t)-\widetilde{x(t)}]^2} = \widetilde{x^2(t)} - \widetilde{x(t)}^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x^2(t_k) - \widetilde{x(t)}^2$$

Distribuční funkce



$$\Delta T_1 = \sum_{i=1}^{m} \Delta\tau_i \qquad F(x_1) = P\left[x(t) < x_1\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{\Delta T_1}{T}.$$



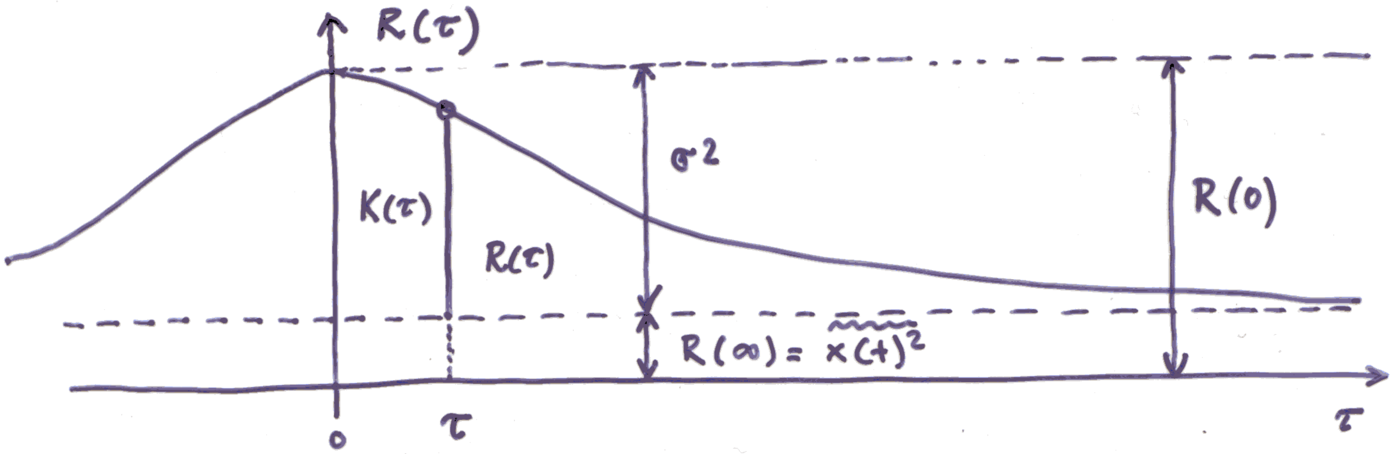
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{m} \Delta t_i$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\Delta T}{T} = P(x_1 < x(t) < x_1 + \Delta x) = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\,dx \doteq w(x_{12})\,\Delta x$$

Hustota rozdělení pravděpodobnosti: $w(x_{12}) \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{\Delta x} \dfrac{\Delta T}{T}.$

Základní vlastnosti časové korelační funkce.



a) $R(\infty) = \lim\limits_{\tau\to\infty} \overline{x(t)\,x(t-\tau)} = \overline{x(t)}\;\overline{x(t-\tau)} = \overline{x(t)}^{\,2}$

b) $R(0) = \lim\limits_{\tau \to 0} \overline{x(t)\,x(t-\tau)} = \overline{x(t)\,x(t)} = \overline{x^2(t)} = \sigma^2 + \overline{x(t)}^2$

$\sigma^2 = R(0) - R(\infty)$

pro $\overline{x(t)} = 0 \quad R(0) = \sigma^2$

c) $R(\tau) = R(-\tau)$ (v důsledku časové invariantnosti stac. náh. procesu)

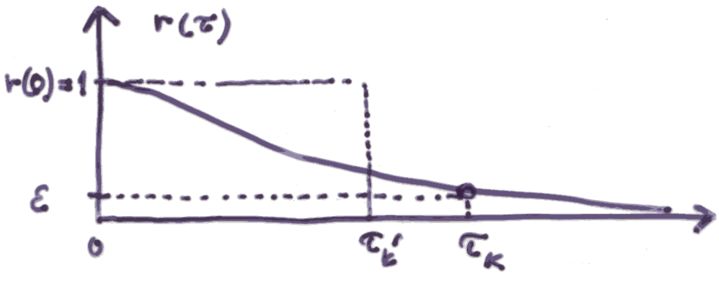
sudá funkce

d) U ergodických náh. procesů bez deterministické složky, se s rostoucím τ zmenšují vzájemné vazby mezi hodnotami procesu, koeficient korelace se blíží k nulové hodnotě. Prakticky můžeme tyto vazby zanedbat již při nějaké konečné hodnotě τ_k, počínaje hodnotou τ_k pokládat hodnoty procesu již za nekorelované.

→ interval korelace

Definujeme jej hodnotou, při které $|r(\tau)| < \varepsilon$ (např. $\varepsilon = 0.05$)

Při monotónním průběhu τ_k'



$$\tau_k' = \int_0^\infty |r(\tau)|\, d\tau$$

e) Wiener – Chinčinův teorém;

korelační funkce vyjadřuje spektrální vlastnosti náh. procesu

energetické spektrum $\overset{\longleftarrow}{\underset{\text{F.T.}}{\longrightarrow}}$ korelační funkce

f) Korelační funkce periodického procesu má periodický charakter.

d. f. :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega_0 t}$$ Fourierova řada periodického průběhu

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt$$

Skutečné amplitudy A_n jednotlivých harmonických složek :

$A_n = 2|C_n|$ $A_0 = C_0$

$$R(\tau) = \widetilde{x(t)\,x(t-\tau)} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,x(t-\tau)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega_0(t+\tau)} dt$$

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega_0\tau} \underbrace{\left[\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t) e^{jn\Omega_0 t} dt \right]}_{C_n^*}.$$

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_n^* e^{jn\Omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 e^{jn\Omega_0\tau}$$

$$R(\tau) = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} A_n^2 \left[e^{jn\Omega_0\tau} + e^{-jn\Omega_0\tau} \right]$$

$$R(\tau) = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 \cos n\Omega_0\tau$$

$$R(0) = \widetilde{x(t)^2} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2$$ výkon periodického průběhu.

Jednotlivé členy vyjadřují střední výkon harmonických složek periodického průběhu $x(t)$ na odporu 1Ω

A_0^2 – výkon stejnosměrné složky

VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ FUNKCE

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)\, y(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, w(x, y, t_1, t_2)\, dx\, dy .$$

$x(t), y(t)$ nezávislé: $w(x, y, t_1, t_2) = w(x, t_1)\, w(y, t_2)$

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)\, y(t_2)} = \overline{x(t_1)}\ \overline{y(t_2)}$$

<u>Nekorelované</u>, <u>nekoherentní</u>

Součet náhodných procesů:
(signál + rušení)

$$R(t_1, t_2) = \overline{[x(t_1) + y(t_1)][x(t_2) + y(t_2)]} = \overline{x(t_1)x(t_2)} + \overline{y(t_1)\, y(t_2)} + \overline{x(t_1)y(t_2)} + \overline{y(t_1)\, x(t_2)} = R_{xx}(t_1, t_2) + R_{yy}(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{yx}(t_1, t_2).$$

Nekorelované procesy: $R(t_1, t_2) = R_{xx}(t_1, t_2) + R_{yy}(t_1, t_2)$

pokud jsou simultánní hustoty rozdělení obou procesů časově invariantní: $R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau)$

VZÁJEMNĚ STACIONÁRNÍ PROCESY

pokud jsou i jednotlivě STACIONÁRNÍ $\Longrightarrow$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau)$$

! $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$

Pro <u>vzájemně ergodické</u>: $R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)\, y(t+\tau)} = \widetilde{x(t)\, y(t+\tau)} =$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, y(t+\tau)\, dt, \quad \widetilde{x(t)\, y(t)} = R_{xy}(0)$$

NP 16

SPEKTRUM STACIONÁRNÍCH NÁHODNÝCH PROCESŮ

spektrální vlastnosti průběhu

determinovaný průběh - spektrální fce (Fourierova transformace čas. průběhu)

stacionární náhodný proces - teoreticky neomezené trvání
- reprezentace pomocí množiny možných náh. průběhů

integrovatelnost (absolutní) fce $x(t, r)$

FT různá pro jednotlivé realizace → FT je náhodná funkce

⇒ HUSTOTA STŘEDNÍHO VÝKONU

Energetické spektrum náh. stacionárního procesu:

časově omezená realizace $\left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right)$ ... index T

daná realizace ... r

$$x_{rT}(t) = x_r(t) \quad \text{pro} \quad t \in \left\langle -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right\rangle$$
$$x_{rT}(t) = 0 \quad \text{pro ostatní } t$$

spektrální funkce omezené realizace:

$$F_{rT}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{rT}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} x_r(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

zpětná transformace:

$$x_{rT}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{rT}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

střední výkon omezené realizace W_{rT} na odporu R:

$$W_{rT} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{rT}^2(t)\, dt = \frac{1}{R}\,\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_{rT}(t)\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{rT}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, dt$$

záměnou v pořadí integrace:

$$W_{rT} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{RT} \int_{-\infty}^{\infty} F_{rT}(\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_{rT}(t)\, e^{j\omega t}\, dt \right]}_{F_{rT}^{*}(\omega)} d\omega$$

NP 17

$$W_{rT} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{RT}\int_{-\infty}^{\infty} F_{rT}(\omega)\,F^{*}_{rT}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{RT}\int_{-\infty}^{\infty} |F_{rT}(\omega)|^{2}\,d\omega$$

$\Rightarrow$

$$W_{rT} = \frac{1}{RT}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2}_{rT}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{R}\int_{0}^{\infty}\frac{2}{T}\,|F_{rT}(\omega)|^{2}\,d\omega = \frac{1}{R}\int_{0}^{\infty}\frac{2}{T}\,|F_{rT}(\omega)|^{2}\,df.$$

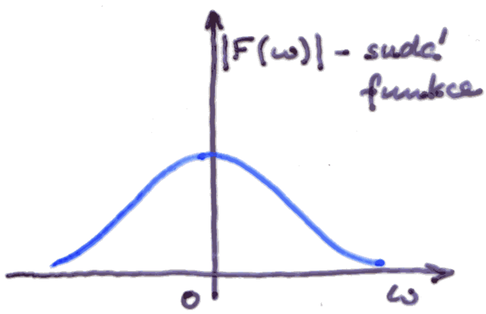
Parsevalův teorém

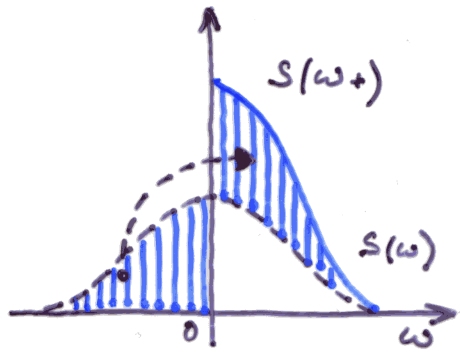
Energie, resp. výkon, signálu může být určen buď z časového průběhu $x(t)$, nebo v kmitočtové oblasti pomocí spektrální funkce $F(\omega)$.

- integrand $\frac{2|F_{rT}(\omega)|^{2}}{T}\,df$ představuje elementární výkon signálu způsobený jeho složkami v elementárním kmitočtovém intervalu df na odporu 1Ω ⟶ elementární střední výkon signálu v pásmu jednotkové šířky 1Hz, HUSTOTA STŘEDNÍHO VÝKONU omezené realizace

$$S_{rT}(\omega+) = \frac{2}{T}\,|F_{rT}(\omega)|^{2}.$$

$x(t)$ je reálná funkce $\Rightarrow$





V případě stacionárního NÁHODNÉHO procesu je pro každé r průběh $x_{rT}(t)$ jiný $\Rightarrow$ liší se $F_{rT}(\omega)$ i $S_{rT}(\omega+)$

Průměrná hodnota hustoty z množiny možných hodnot $S_{rT}(\omega+)$

$$S_{T}(\omega+) = \overline{S_{rT}(\omega+)} = \frac{2}{T}\,\overline{|F_{rT}(\omega)|^{2}}.$$

$$S(\omega+) = \lim_{T\to\infty} S_{T}(\omega+) = \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}\,\overline{|F_{rT}(\omega)|^{2}} \qquad [W/Hz]$$

ENERGETICKÉ SPEKTRUM (POWER SPECTRUM)

Pozn: $W_{\Delta f} = \frac{1}{R}\,S(\omega_{s})\,\Delta f$ $\quad\omega_{s}$ – střední frekvence v pásmu Δf

ENERGETICKÉ SPEKTRUM $\leftrightarrow$ KORELAČNÍ FUNKCE

Wiener – Chinčinova transformace

$$S_{rT}(\omega) = \frac{1}{T} F_{rT}(\omega) F^{*}_{rT}(\omega) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_r(t_1)\, x_r(t_2)\, e^{-j\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

na $\updownarrow$

$(-\infty, \infty)$

Využitím

$$R(\tau) = R(t_1 - t_2) = \overline{x_r(t_1)\, x_r(t_2)}$$

dostaneme

$$S_T(\omega) = \frac{1}{T} \overline{|F_rT(\omega)|^2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t_1 - t_2)\, e^{-j\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

$$S_T(\omega) = \int_{-T}^{T} R(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau - \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} |\tau|\, R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Za předpokladu existence integrálu $\int_{-T}^{T} |\tau R(\tau)|\, d\tau < \infty$

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} S_T(\omega) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} R(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega .$$

a) $R(\tau)$ je reálné a sudé:

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau \,; \quad R(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau\, d\omega$$

$S(\omega+)$:

$$S(\omega+) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau \,; \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega+) \cos\omega\tau\, d\omega$$

Další vlastnosti:

a) $R(\tau)$ reálná a sudá funkce τ

$\rightarrow$ $S(\omega)$ reálná a sudá funkce ω

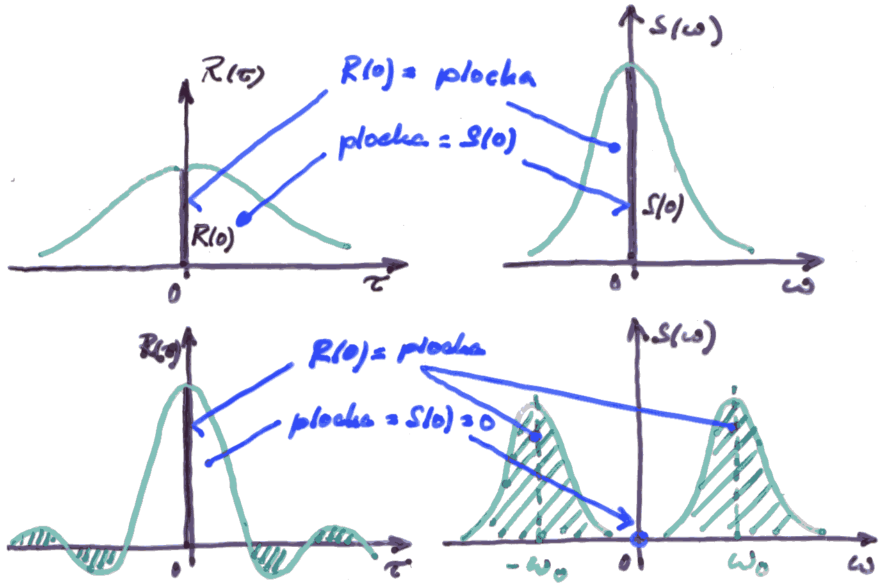
$$S(\omega_+) = 4\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau \, d\tau \qquad R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S(\omega_+)\cos\omega\tau \, d\omega.$$

b) časově kratší průběh má širší spektrum $\Rightarrow$
čím užší bude energ. spektrum $S(\omega)$ $\rightarrow$ tím širší $R(\tau)$, tj. interval korelace bude tím větší.

Zúžení spektra např. filtrací vede ke zvětšení korelace mezi vzdálenějšími hodnotami procesu a naopak. V případě neomezeného spektra, tj. neomezeně širokého (ideální bílý šum) korelační fce bude neomezeně úzká, časově sebebližší hodnoty procesu budou nekorelované.

c) $\tau = 0$ $\quad R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S(\omega_+)\, d\omega = W$

celkový střední výkon náhodného procesu na odporu 1Ω



Vzájemné energetické spektrum

$R_{xy}(\tau) \longleftrightarrow S_{xy}(\omega)$ vzájemné výkonové spektrum

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \; ; \quad R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \overline{F_{x_{rT}}(\omega)\, F^{*}_{y_{rT}}(\omega)}$$

$R_{xy}(\tau)$ není sudou funkcí, S_{xy} je komplexní funkcí ω

Výsledné energetické spektrum součtu dvou náhodných procesů:

$S(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega) + S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega)$

pro nekorelované procesy: $S(\omega) = S_{xx}(\omega) + S_{yy}(\omega)$.

Výpočet spektrální výkonové hustoty pomocí autokorelační funkce:

PŘÍKLAD

slabě legovaný polovodič n typu

fotoelektrický jev (vnitřní), tepelné excitace

vznik a rekombinace : elektron – díra

koncentrace děr ve vzorku P bude fluktuovat kolem $\overline{P}$

$\Delta P = P - \overline{P}$

G-R proces lze charakterizovat časovou konstantou τ

rovnovážný stav za působení činidla, po jeho odstranění exp. pokles P

Soubor

Systém identických navzájem fluktuujících soustav

Podsoubor, ve kterém $\Delta P = \Delta P_0$ pro $\Delta P(t=0)$

$$-\frac{d\Delta P}{dt} = \frac{\Delta P}{\tau} \qquad \Delta P = \Delta P_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\overline{\Delta P}^{s} = \Delta P_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

pro $t > 0$ určíme $\Delta P_0 \cdot \overline{\Delta P}^{s} = \Delta P_0^2 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\overline{\Delta P(0)\, \Delta P(t)} = \overline{\Delta P_0 \, \overline{\Delta P}^{s}} = \overline{\Delta P_0^2} \, e^{-\frac{t}{\tau}} = \overline{\Delta P^2} \, e^{-\frac{t}{\tau}} = R_p(t)$$

V případě stac. procesu je střední hodnota nezávislá na začátku odečtu času!

$$S_p(f) = 4 \cdot \int_0^\infty \overline{\Delta P^2} \, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t \, dt; \Rightarrow \mathrm{Re}\left[2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau} - j\omega t} dt \right]$$

$S_p(\omega_+)$

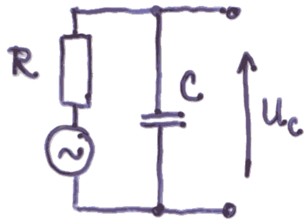
$$= \mathrm{Re}\, 4 \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right) t} dt = -\frac{4\, \mathrm{Re}}{\frac{1}{\tau} + j\omega} \left[e^{-\left(\frac{1}{\tau} + j\omega\right) t} \right]_0^\infty$$

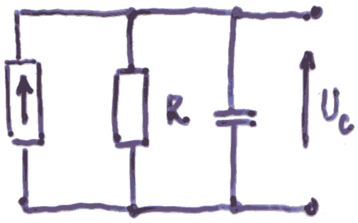
$$= \mathrm{Re}\left[\frac{4\tau}{1 + j\omega\tau} \cdot \frac{1 - j\omega\tau}{1 - j\omega\tau} \right] = \frac{4\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$S_p(\omega_+) = 4 \overline{\Delta P^2} \cdot \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} .$$

Výpočet $S_x(0)$ na základě statistických představ:

Příklad, bílý šum.





$$\bar{u}_C = \frac{\bar{u}_N}{R+\frac{1}{j\omega C}}\cdot\frac{1}{j\omega C}$$

$[S_u(0)\,\Delta f]^{1/2}$ $\qquad [S_I(0)\,\Delta f]^{1/2}$ $\qquad$ e.m.s. $u(t)$

Nyquistův vztah $\quad S_u(0) = 4kTR$

Podle ekvipartičního teorému: $\frac{1}{2}C\overline{u_c^2} = \frac{1}{2}kT$ tj. $\overline{u_c^2} = \frac{kT}{C}$

v intervalu frekvencí df bude příspěvek výkonu: $d\overline{u_c^2} = S_u(0)\,df\cdot\dfrac{\frac{1}{\omega^2C^2}}{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}$

$$\overline{u_c^2} = \int_0^\infty d\overline{u_c^2} = S_u(0)\cdot\int_0^\infty\frac{df}{1+\omega^2C^2R^2} \qquad x = \omega CR$$

$$= \frac{S_u(0)}{2\pi CR}\underbrace{\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{S_u(0)}{4CR} = \frac{kT}{C}$$

$$S_u(0) = 4kTR$$

$$S_I(0) = \frac{S_u(0)}{R^2} = \frac{4kT}{R} = 4kTG$$

Platí do infračervené oblasti

Kvantová oprava $\quad \frac{hf}{kT}\approx 1$

Střední hodnota energie harm. osc.: kT

$$\bar{\varepsilon} = kT\,\frac{\frac{hf}{kT}}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}$$

$$S_u(f) = 4R\,\frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}.$$

Obvykle $\frac{hf}{kT}\ll 1 \qquad f_0 = \frac{kT}{h} \qquad 300\,\mathrm{K},\ f_0\approx 6\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$

Při kryogenních teplotách $f_0\approx 100\,\mathrm{GHz}$