

VZORKOVÁNÍ (Spojitých signálů)

libovolný, prakticky existující časový průběh (signál) má vždy omezené spektrum (konečný interval kmitočtového pásma)

- vlastnosti zdroje
- přenosová cesta
- zařízení pro zpracování

Shannonův - Kotelnikovův teorém:

Každý časový průběh s omezeným spektrem může být jednoznačně vyjádřen svým okamžitými hodnotami (vzorky) odebranými v periodických okamžicích s periodou $T_0 \leq \frac{1}{2F_m}$, kde F_m je horní mez kmitočtů spektra uvažovaného časového průběhu.

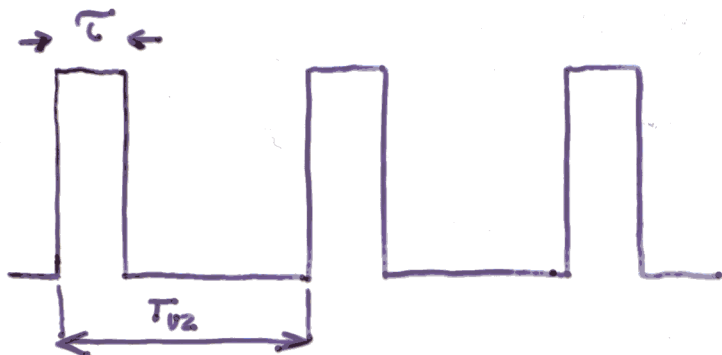
$x(t)$, $x_v(t)$ - vork. průběh reprezentovaný časovou řadou impulzů (v přijímacím zařízení z něj zpět může být rekonstruován jednoznačně původní spojitý průběh $x(t)$)

DRUHÝ VZORKOVÁNÍ:

1. IDEÁLNÍ : realizovatelný (δ pulz)
2. PRVÉHO DRUHU: šírka impulsu τ , vrchol sleduje spojitý průběh $x(t)$ (upozorování)
3. DRUHÉHO DRUHU: τ , vrchol je "konstantní", při zpětné transformaci se projeví číselné potlačení vyšších kmitočtů anal. signálu



Spektrum vzorkovaného signálu:



$P(t)$ periodický signál

I. derivace $x_v(t) = x(t) \cdot P(t)$

$$\Omega_{vz} = \frac{2\pi}{T_{vz}} = 2\pi F_{vz}$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_{vz}t}$$

$$C_k = \frac{1}{T_{vz}} \int_{-T_{vz}/2}^{T_{vz}/2} P(t) e^{-jk\Omega_{vz}t} dt = \frac{1}{T_{vz}} \int_{-T_{vz}/2}^{T_{vz}/2} e^{-jk\Omega_{vz}t} dt = \frac{1}{T_{vz}} \int_{-T_{vz}/2}^{T_{vz}/2} \cos k\Omega_{vz}t dt$$

$$C_k = \frac{\tau}{T_{vz}} \cdot \frac{\sin k\pi\tau F_{vz}}{k\pi\tau F_{vz}}; \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$x_v(t) = x(t) \cdot P(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_{vz}t};$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$X_{vk}(f) = C_k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega - k\Omega_{vz})t} dt = C_k \cdot X(f - kF_{vz})$$

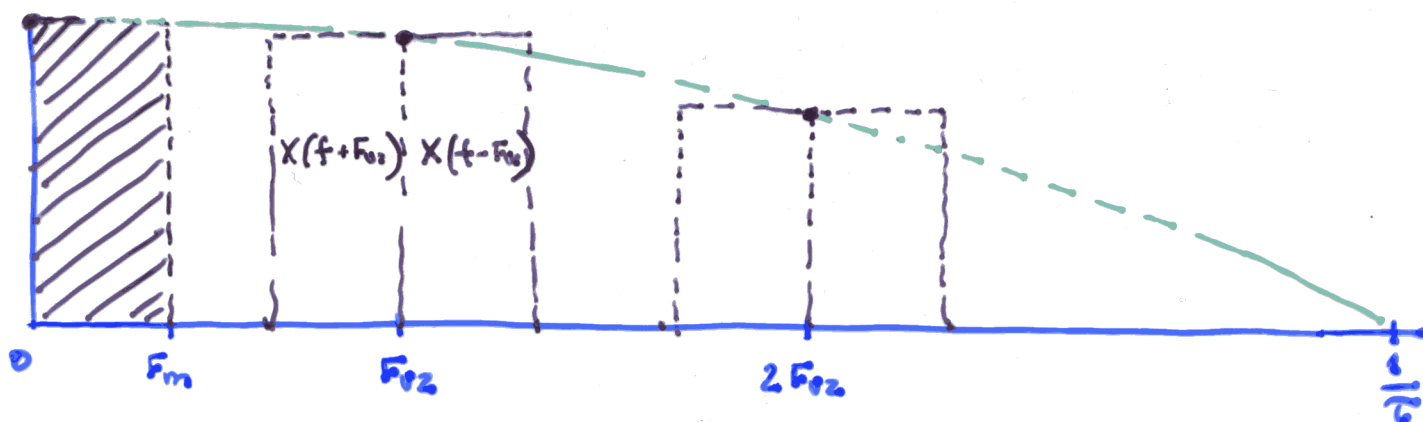
Spektrum k -tého členu sumace je rovno posunutému spektru původního signálu (o celistvý násobek vzorkovacího kmitočtu) násobenému konstantou C_k

$$X_v(f) = \frac{\tau}{T_{vz}} X(f) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k X(f \pm kF_{vz})$$

$$|X_v(f)| = \frac{\tau}{T_{vz}} |X(f)| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k X(f \pm kF_{vz})|$$

linearita, ortogonalita fáz. členů





Použitím dolnofrekvenční propusti vyjme zátěžní složku $X(t)$ ze spektra.

* VZORKOVACÍ TEOREM

Jestliže je vzorkovací frekvence F_{02} maximální frekvence harmonické složky vzorkovaného signálu, může být $F_m \leq \frac{F_{02}}{2}$

Při "laciné" volbě $F_m = \frac{F_{02}}{2}$ a použití dolnofrekvenční propusti s konečnou šířkou dochází k potlačení horních kmitočtových složek a případné přítomnosti určité části vyšší sousední části spektra

ALIASING

* Přítomnost ss složky se projeví diskretizací spektrálními čarami v místě násobků vzorkovacího kmitočtu ... $k \cdot F_{02}$.

IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ:

$$\sigma \rightarrow 0$$

$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_{02})$$

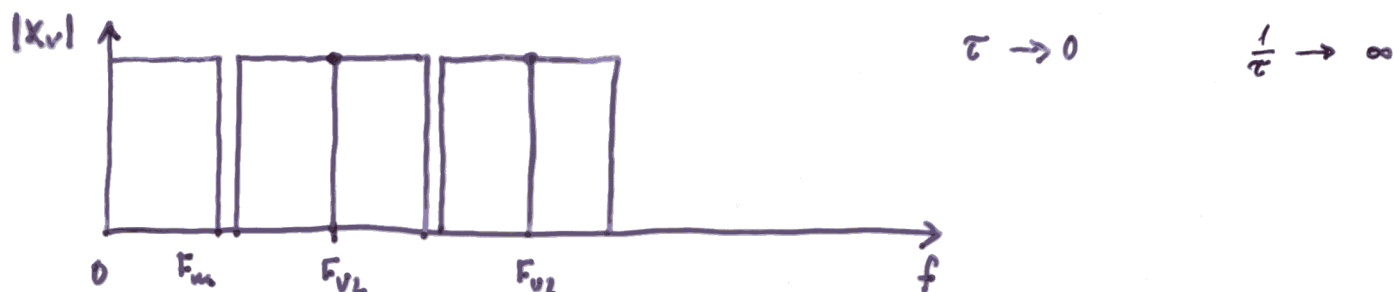
$$P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_{02}t} = \frac{1}{T_{02}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{02}t}$$

✓ řada periodické postupnosti δ -pulsů

$$C_k = \frac{1}{T_{02}} \int_{-\frac{T_{02}}{2}}^{\frac{T_{02}}{2}} e^{-jk\omega_{02}t} \delta(t - kT_{02}) dt = \frac{1}{T_{02}} e^{-jk\omega_{02}T_{02}} = \frac{1}{T_{02}} e^{-jk^2 \cdot 2\pi} = \frac{1}{T_{02}}$$

$$X_v(t) = X(t) \cdot P(t) = \frac{X(t)}{T_{v2}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{v2}t}$$

$$X_v(f) = \frac{1}{T_{v2}} \left[X(f) + \sum_{k=1}^{\infty} X(f \pm kF_{v2}) \right]$$



VZORKOVÁNÍ II. DRUHU.

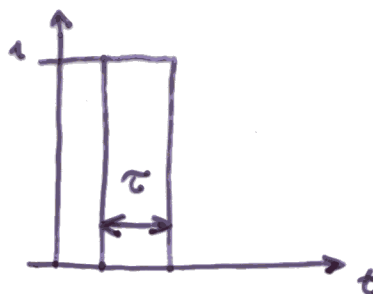
$$x_v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_{v2}) V(t - kT_{v2})$$

konvoluce signálu a hromadného pulsu

$F_v(f)$ spektrální funkce impulsu

$F_v(f) \cdot e^{-j\omega k T_{v2}}$ posunutý impuls $V(t - kT_{v2})$

$V(t)$ je impuls jednotkové amplitudy a zadaného tvaru.



$$X_v(f) = F_v(f) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{v2}) e^{-j\omega k T_{v2}}$$

spektrální fce náoř. signálu

$$X_v(t) = F_v(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_{v2}) d\tau$$

$$X_v(t) = F_v(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_{v2}} e^{jk\omega_{v2}(\tau - kT_{v2})} d\tau$$

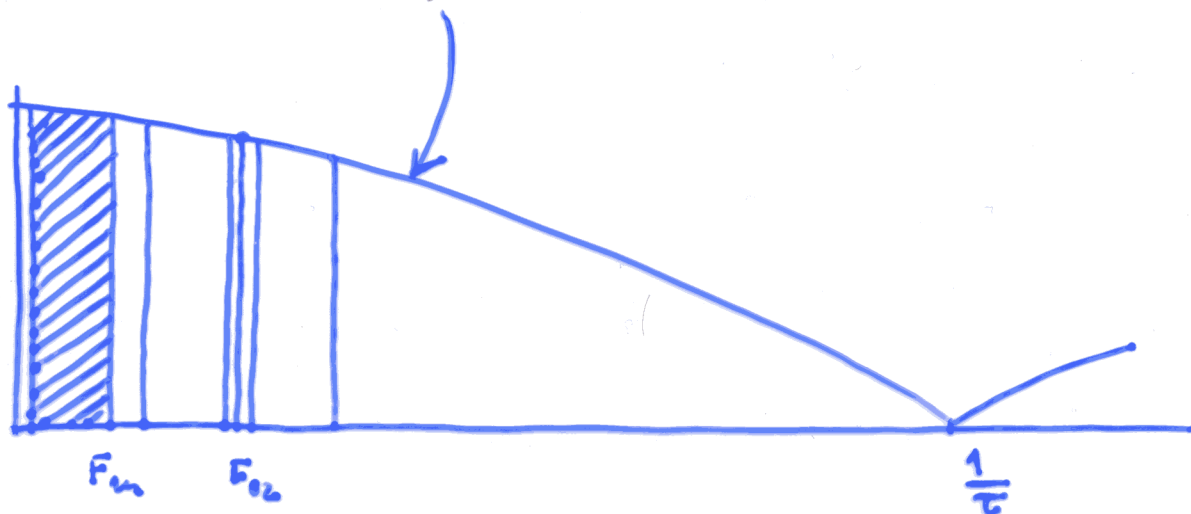
$$= \frac{1}{T_{v2}} F_v(f) \left[X(f) + \sum_{k=1}^{\infty} X(f \pm kF_{v2}) \right]$$

Pokud $v(t)$ je pravoúhlý puls šířky τ :

$$F_v(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \tau \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f}$$

a tedy

$$|X_v(f)| = \frac{\tau}{T_{02}} \left| \frac{\sin \pi \tau f}{\pi \tau f} \right| \cdot [|X(f)| + \sum |X(f \pm k F_{02})|]$$



Spektrum zohř. složky zůstane' dolnofrekv. propusti' bude vykazovat lineární zkreslení

τ ovlivňuje pokles amplitudy, vyskypne' se vztahem pro 'intenzitu' výřku spektra!

pulsy naruš výřku

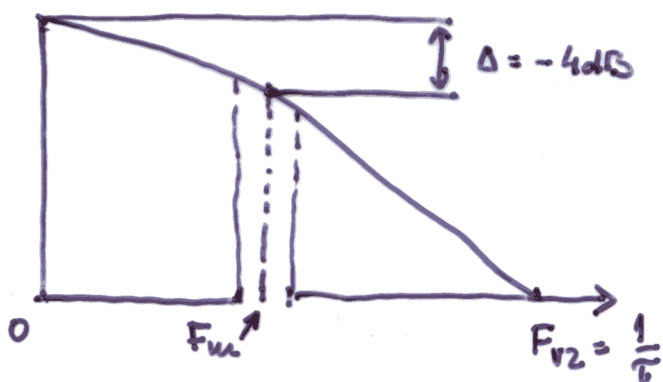


?



$$F_m = \frac{1}{2} F_{02}$$

$$\tau = T_{02}$$



$$\Delta = 20 \log \frac{\sin \pi T_{02} F_m}{\pi T_{02} F_m} = 20 \log \frac{2}{\pi}$$

CAMPBELLŮV TEOREM (1909)

Nechť má elementární událost v čase $t=t_i$ odezvu $f(t-t_i)$ v určitém systému tak, že úplná odezva $Y(t)$ je sumou velkého počtu nezávislých odezv $f(t-t_i)$, které se vyskytují náhodně se shlední frekvencí λ .

$Y(t) = \sum_i f(t-t_i)$ pro $t < T$, pokud $T \gg$ časová konstanta odezvy elementární události.

$$\text{Potom } \bar{Y} = \lambda \int_0^{\infty} f(u) du, \quad \text{var } Y = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = \lambda \int_0^{\infty} f^2(u) du$$

(uvažte existenci integrálu!)

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{u}} !$$

Později Campbell nahradil $\lambda \rightarrow \frac{\Delta N^2}{\tau}$ - fluktuace počtu událostí v časovém intervalu τ

$\overline{\Delta N^2} \sim \tau$, v případě poissonovského procesu $\overline{\Delta N^2} = N$; $N = \lambda \cdot \tau$

CARSONŮV TEOREM

$$Y(t) = \sum_i F(t-t_i)$$

Nechť $F(u)$ je absolutně integrovatelná.

Potom Four obraz funkce $F(u)$ $\Psi(f) = \int_0^{\infty} F(u) \exp(-j\omega u) du$ existuje a spektrální výkonová hustota $S_Y(f)$ odezvy $Y(t)$ je

$$S_Y(f) = 2 \cdot \lambda \cdot |\Psi(f)|^2$$

V případě, že jednotlivé události nejsou identické, je potřeba zavést $|\Psi(f)|^2$

alternativní vyjádření:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k f(t-t_k)$$

a_k - amplituda k -tého impulsu

K - počet impulsů v postupnosti délky T

$$f(t) = 0 \quad t < 0$$

události jsou nezávislé, časy t_k mají Poissonovo rozdělení

$$\overline{x(t)} = \nu \cdot \bar{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad ; \quad \nu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K}{T} \quad \text{shlední frekvence výskytu událostí}$$

\bar{a} - střední hodnota amplitudy

Spektrální hustota procesu x v případě, že a_n mají symetrické rozdělení vůči nule, tj. $\bar{a} = 0$

$$\overline{S_x(\omega)} = 2 \cdot \nu \cdot \bar{a}^2 |F(j\omega)|^2$$

při $\bar{a} \neq 0$

$$\overline{S_x(\omega)} = 2 \cdot \nu \cdot \bar{a}^2 |F(j\omega)|^2 + 4\pi \overline{x(t)}^2 \delta(\omega)$$

Důkaz: využitím vztahu pro F. obraz $x(t)$, definice spektr. a hustoty

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|F(j\omega)|^2}{T}; \text{ výpočet a úprava s využitím stacionarity}$$

$$\text{procesu, limitní vyjádření } \delta \text{ fu pomocí } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(Nt)}{\pi N t^2} = \delta(t)$$

Autokorelační funkce:

$$\varphi_x(\tau) = \frac{\nu \bar{a}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cos \omega \tau d\omega + \overline{x(t)}^2$$

$$\varphi_x(\tau) = \nu \bar{a}^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t+\tau) dt + \overline{x(t)}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{pomocí Parsevalova vztahu} \\ \text{a posunutí } e^{j\omega\tau} \end{array} \right)$$

Pro f ve tvaru δ -funkce $\Leftrightarrow F(j\omega) = 1$

Impulsní proces

$$(*) \quad \overline{S_x(\omega)} = 2 \cdot \nu \bar{a}^2 + 4\pi [\overline{x(t)}]^2 \delta(\omega)$$

$$(**) \quad \varphi_x(\tau) = \frac{\nu \bar{a}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cos \omega \tau d\omega + [\overline{x(t)}]^2 = \nu \bar{a}^2 \delta(\tau) + [\overline{x(t)}]^2$$

Jednoduchý výstředový šum:

$$① \quad i(t) = -q \sum_{k=1}^K \delta(t-t_k)$$

C. teorem $-\bar{I} \triangleq \overline{i(t)} = -q \cdot \nu$

$$\nu = \frac{\bar{I}}{q} \quad (\text{emise z katody})$$

impulsní proces - nelze použít větu o stř. kvadrátu veličiny v Campbellově t.

nelze touto cestou spočítat var i

ale podle (30):

$$\overline{\varphi_i(\tau)} = q \cdot I \delta(\tau) + I^2$$

a spektrální výkonová hustota podle (33):

$$\overline{S_i(\omega)} = 2qI + 4\pi I^2 \delta(\omega) \quad (\text{se složka signálu})$$

② Plyn elektronů v rovinné vakuumé diodě v režimu nasycení:

Potenciál anody vůči katodě V_a

Jak vypadají proudové impulsy?

τ - doba přeletu elektronů diodou; $\tau = \frac{2d}{v_a}$ - rychlost e
rovnoměrně zrychlený pohyb

$$\tau = \frac{2d}{\sqrt{\frac{2eV_a}{m}}}$$

střední rychlost $\frac{v_a}{2}$; proud $i(t)$ tvořený elektrony, emitovanými v čase t_i :

$$i(t) = \frac{2e(t-t_i)}{\tau^2} \quad \text{pro } t_i \leq t \leq t_i + \tau$$

$$i(t) = \frac{e \cdot n(t)}{d} \quad \text{neboť } i(t) = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$n(t) = (t-t_i) \cdot a = \frac{V_a \cdot e}{m \cdot d} (t-t_i) \quad \tau^2 = \frac{4d^2}{\frac{2eV_a}{m}}$$

$$n(t) = \frac{2d}{\tau^2} (t-t_i) \quad t_i + \tau$$

$$i(t) = \frac{2e}{\tau^2} (t-t_i) \quad t_i$$

$$\int_{t_i}^{t_i+\tau} i(t) dt = e !$$

$$\Psi(f) = \int_0^{\tau} \frac{2e u}{\tau^2} \exp(-j\omega u) du = e \cdot \varphi_3(j\omega\tau)$$

$$\varphi_3(j\omega\tau) = \frac{2}{(j\omega\tau)^2} [1 - \exp(-j\omega\tau) - j\omega\tau \exp(-j\omega\tau)]$$

$$\lambda = \frac{\bar{I}}{e} \dots \text{četnost impulsů}$$

$$S_I(f) = 2e \frac{\bar{I}}{e} |\psi(f)|^2 = 2e \bar{I} |\varphi_3(j\omega\tau)|^2 \quad (\text{viz Carsonův koeficient})$$

$$|\varphi_3(j\omega\tau)|^2 = ? \quad \tau \approx 10^{-9} \text{ s} \Rightarrow |\varphi_3(j\omega\tau)|^2 \rightarrow 1 \quad \text{při } \omega\tau < \pi$$

spektrum $S_I(f)$ je "bílé" (do frekvencí stovek MHz)

Výštrělový šum elektronů emitovaných z katody má bílé spektrum do frekvencí 10^8 Hz .

③ Šum v pentodě (triodě)

katoda emituje n_c elektronů, n_a končí na anodě
 n_z na mřížce

Za P.p. je proud i omezen prostorovým nábojem v oblasti katoda - mřížka, jsou fluktuace katodového proudu číselně omezeny prostorovým nábojem. V důsledku toho $\text{var } n_c < \bar{n}_c$.

Veže o disperzi:

$a_i = 1$... dopad na anodu
 $a_i = 0$... na mřížku.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \sum_{i=1}^N a_i \quad ; \quad \bar{a}_i = \bar{a}, \quad \overline{a_i^2} = \bar{a}^2 \\ \bar{n} = \bar{N} \cdot \bar{a} \\ \text{var } n = (\bar{a})^2 \text{var } N + \bar{N} \text{var } a \end{array} \right.$$

λ - p.p. dopadu na anodu; $(1-\lambda)$... na mřížku. (binomický proces)
 n_c (poissonovský proces); $\text{var } n_c = \Delta n_c^2 = \bar{n}_c^2 - \bar{n}_c^2$

$$\bar{a} = \lambda$$

$$\text{var } a = \lambda(1-\lambda)$$

$$\bar{n}_a = \bar{n}_c \cdot \bar{a}$$

$$\bar{n}_a = \bar{n}_c \lambda$$

$$\bar{n}_z = \bar{n}_c (1-\lambda)$$

$$(1) \text{ var } n_a = \lambda^2 \text{var } n_c + \bar{n}_c \lambda (1-\lambda)$$

$$(2) \text{ var } n_z = (1-\lambda)^2 \text{var } n_c + \bar{n}_c \lambda (1-\lambda)$$

....> zeslabený výstřelový šum

→ šum rozdělení proudu

z (1)

$$\text{var } n_a = \bar{n}_c \lambda + \lambda^2 (\text{var } n_c - \bar{n}_c) = \bar{n}_a + \lambda^2 (\text{var } n_c - \bar{n}_c)$$

Pokud sum katodového proudu není omezen prost. nábojem,
 $\text{var } n_a \neq \bar{n}_a$ (anodový proud obsahuje úplný výstřelový sum; t.j. za podmínky,
 že katodový proud obsahuje úplný výstřelový sum)

$$n_c = n_a + n_z$$

$$\Delta n_c = \Delta n_a + \Delta n_z$$

$$\overline{\Delta n_c^2} = \text{var } n_c = \overline{\Delta n_a^2} + 2 \overline{\Delta n_a \Delta n_z} + \overline{\Delta n_z^2} = \text{var } n_a + \text{var } n_z + 2 \overline{\Delta n_a \Delta n_z}$$

z $\text{var } n_a$ z (1) a $\text{var } n_z$ z (2):

$$\overline{\Delta n_c^2} = \text{var } n_c = \lambda^2 \text{var } n_c + \bar{n}_c \lambda (1-\lambda) + (1-\lambda)^2 \text{var } n_c + \bar{n}_c \lambda (1-\lambda) + 2 \overline{\Delta n_a \Delta n_z}$$

$$\text{var } n_c = \text{var } n_c [\lambda^2 + (1-\lambda)^2] + 2 \bar{n}_c \lambda (1-\lambda) + 2 \overline{\Delta n_a \Delta n_z}$$

$$2 \lambda (1-\lambda) = 1 - \lambda^2 - (1-\lambda)^2$$

$$2 \overline{\Delta n_a \Delta n_z} = \text{var } n_c [1 - \lambda^2 - (1-\lambda)^2] - 2 \bar{n}_c \lambda (1-\lambda)$$

$$(x) \quad \overline{\Delta n_a \Delta n_z} = \underbrace{(\text{var } n_c - \bar{n}_c)}_0 \cdot \lambda (1-\lambda)$$

$\rightarrow \quad \overline{\Delta n_a \Delta n_z} = 0 \Rightarrow \Delta n_a$ a Δn_z jsou nezávislé

$$(3) \quad \Delta n_a = \lambda \cdot \Delta n_c + \Delta n_p$$

$$(4) \quad \Delta n_z = (1-\lambda) \Delta n_c - \Delta n_p \quad ; \quad \text{kde } \Delta n_p \text{ závisí na } \Delta n_c$$

Obě rovnice vyjadřují skutečnost, že elektrony dopadající na anodu
 nedopadají na anodu a vice-versa.

Δn_p vyjadřují fluktuace rozdělení proudu.

Δn_c fluktuace proudu katody

Podle vzt. o disperzi:

$$\text{var } n_a = \lambda^2 \overline{\Delta n_c^2} + \overline{\Delta n_p^2}$$

nezávislost Δn_p a Δn_c !

$$\overline{\Delta n_p^2} = \text{var } n_a - \lambda^2 \overline{\Delta n_c^2} = \text{var } n_a - \lambda^2 \text{var } n_c$$

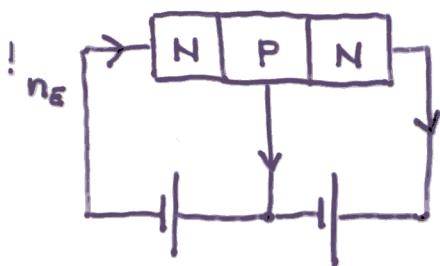
$$\overline{\Delta n_p^2} = \bar{n}_c (1-\lambda) \cdot \lambda$$

$$\begin{aligned} \text{z (3) a (4)} \rightarrow \overline{\Delta n_a \Delta n_z} &= \lambda (1-\lambda) \overline{\Delta n_c^2} - \lambda (1-\lambda) \bar{n}_c = \lambda (1-\lambda) (\text{var } n_c - \bar{n}_c) \\ &= \lambda (1-\lambda) \overline{\Delta n_c^2} - \overline{\Delta n_p^2} \end{aligned}$$

$\overline{\Delta n_p^2}$ je jistě šum, který bude pozorován, jestliže budeme fluktuace katodového proudu zcela potlačily.

④

TRANZISTOR:



n_E - rychlost injekce elektronů do báze

n_B - rychlost rekombinace v bázi

n_C - rychlost vstupní elektronů do kolektoru

α_F - číselný proudový zesílení (spol. B)

$$n_E = n_B + n_C$$

$$\overline{n_B} = (1 - \alpha_F) \overline{n_E}$$

$$\overline{n_C} = \alpha_F \cdot \overline{n_E}$$

var $n_E = \overline{n_E}$ (poissonovský proces)

Věta o disp : var $n_C = \alpha_F^2 \text{var } n_E + \overline{n_E} \alpha_F (1 - \alpha_F) = \overline{n_E} \alpha_F = \overline{n_C}$

$$\text{var } n_B = (1 - \alpha_F)^2 \text{var } n_E + \overline{n_E} \alpha_F (1 - \alpha_F) = \overline{n_E} (1 - \alpha_F) = \overline{n_B}$$

Pokud $\Delta n_B = n_B - \overline{n_B}$ a $\Delta n_C = n_C - \overline{n_C}$

Analogicky s (x) $\overline{\Delta n_B \Delta n_C} = \underbrace{(\text{var } n_E - \overline{n_E})}_{\text{výstř. šum} \rightarrow 0} \alpha_F (1 - \alpha_F) = 0$

DŮSLEDEK:

Proudy kolektoru a báze v tranzistoru fluktuují nezávisle a každý obsahuje úplný výstřelový šum.

SPONTÁNNÍ FLUKTUACE TEPLoty MALÉHO TĚLESA.

C_H - tepelná kapacita malého tělesa

g_H - koeficient přechodu tepla mezi tělesem a okolím

Θ - rozdíl teploty tělesa a okolí

$H(t)$ - uvažovaná funkce náhodných zdrojů fluktuací



$$(1) \quad C_H \frac{d\Theta}{dt} + g_H \Theta = H(t)$$

$$\Theta(t) = \sum_m b_m e^{j\omega_m t}$$

$$H(t) = \sum_m a_m e^{j\omega_m t}$$

$$b_m(j\omega_m C_H + g_H) = a_m$$

$$b_m = \frac{a_m}{j\omega_m C_H + g_H} \quad | \quad |$$

\Rightarrow vztah pro spektrální hustoty fluktuací
náhodných veličin $H(t)$ a $\Theta(t)$:

$$(2) \quad S_{\Theta}(f) = \frac{S_H(f)}{\omega_m^2 C_H^2 + g_H^2} \quad ; \quad \text{předpokládáme} \quad S_H(f) = S_H(0)$$

$$\text{W.-CH.} \quad \overline{\Theta^2} = \int_0^{\infty} S_{\Theta}(f) df$$

$$\overline{\Theta^2} = S_H(0) \int_0^{\infty} \frac{df}{\omega_m^2 C_H^2 + g_H^2} \quad ; \quad x = \frac{\omega C_H}{g_H} \quad d\omega = \frac{2\pi C_H}{g_H} df$$

$$\overline{\Theta^2} = S_H(0) \frac{1}{g_H^2} \cdot \frac{g_H}{2\pi C_H} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1+x^2} = \frac{1}{2\pi g_H C_H} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{S_H(0)}{4g_H C_H}$$

$$(3) \quad S_H(0) = 4g_H C_H \overline{\Theta^2}$$

$$\overline{\Theta^2} = ?$$

Uvažujeme systém identických těles v termodynamické rovnováze s rezerv.
o teplotě T . E_i - energie i -tého tělesa,

pp. že těleso má energii E_i $A \exp^{-\frac{E_i}{kT}}$

normovací podmínka $\sum_i A \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}$

$$\bar{E}_i = \sum E_i A e^{-\frac{E_i}{kT}} = \frac{\sum E_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}}$$

$$C_H = \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial T} = \frac{1}{kT^2} \left\{ \frac{\sum E_i^2 e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}} - \left[\frac{\sum E_i e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}} \right]^2 \right\} = \frac{\overline{E_i^2} - \bar{E}_i^2}{kT^2}$$

$$\overline{E_i^2} - \bar{E}_i^2 = C_H kT^2$$

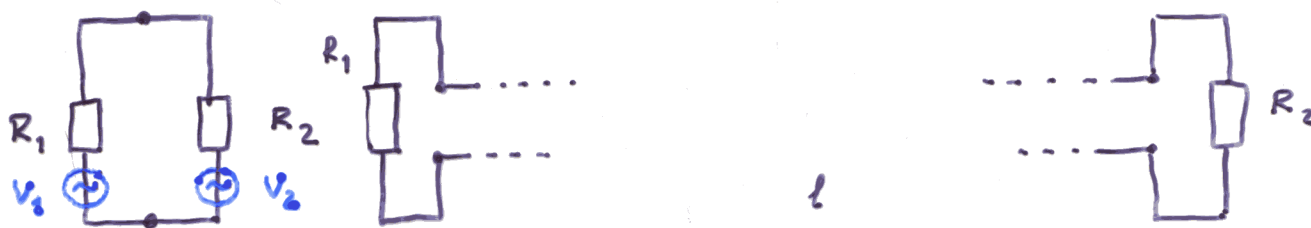
Velikost $E_i - \bar{E}_i = C_H \cdot \theta$, tak $\overline{E_i^2} - \bar{E}_i^2 = C_H^2 \overline{\theta^2} \Rightarrow \overline{\theta^2} = \frac{kT^2}{C_H}$

dosezením do (3): $S_\theta(f) = \frac{4kT^2 g_H}{\omega^2 C_H^2 + g_H^2}$

STŘEDNÍ HODNOTA KVADRÁTU FLUKTUACÍ TEPLoty MALÉHO TĚLESA NEZÁVISÍ NA KVALITĚ TEPELNÉHO KONTAKTU TĚLESA S OKOLÍM, ALE POUZE NA TEPELNÉ KAPACITĚ TĚLESA.

NYQUISTŮV TEOREM

(bílý šum, Johnsonův šum...)



$R = R_1 = R_2$; termodynamická rovnováha , (T)

V_1, V_2 - fluktuující napětí na R_1 a R_2

Výkon, který odvádějí fluktuující systémy "okoli" v důsledku tepelných fluktuací nositelů náboje:

$$P = I^2 R = \frac{V_1^2}{4R_1^2} \cdot R_1 = \frac{V_1^2}{4R}$$

celkový odpor $2R$

A) Při term. rovnováze - toky energie v obou směrech musí být stejné
 $V_1^2 = V_2^2$, platí nezávisle od konkrétní realizace vodičů.

B) A) platí pro libovolné kmitočtové pásmo !

→ pokud by to nebylo splněno, připojením frekv. filtru by vedlo
 k nasátí nebo vydání toku energie \Rightarrow spor s II. větou termodyn.

\Rightarrow Spektrum fluktuací je univerzální funkcí R, T, f
 Jaka' f^2 .

Výkon do vedení $P_{\text{vedení}}$ z vedení (R_1, R_2) ve frekv. intervalu $\frac{d\omega}{2\pi}$

$$P_{\text{vedení}} = \frac{1}{4R} \overline{P_V(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{2\pi}$$

čas přenosu ... $\frac{L}{c}$; tj. Energie $E = \frac{L}{4Rc} \overline{P_V(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}$ je energie
 dodanou oběma vodiči R_1 a R_2

Pokud je vedení zkratováno \rightarrow STOVATE' VLNY

přijel frekvence je vlastně frekvence vedení $\frac{c}{2L}, \frac{2c}{2L}, \dots, \frac{nc}{2L}$

ve frekvenčním intervalu $\frac{d\omega}{2\pi}$ je počet módů roven $\left(\frac{2l}{c}\right) \frac{d\omega}{2\pi}$,
je "nekonečný", l musíme být nekonečně dlouhí.

Uvažujeme-li pro každý mód 1 stupeň volnosti soustavy, plyne z dvípartičního kódu: $dE = \frac{2l}{c} \cdot \frac{kT}{2} \frac{d\omega}{2\pi}$

$$\frac{l}{4\pi c} \overline{S_V(\omega)} \cdot \frac{d\omega}{c} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{kT}{2} \cdot \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\overline{S_V(\omega)} = 4kTR$$

IDENTIFIKACE SYSTÉMU

Použití bilance Fourier.

$$x(t) \dots \text{bílý šum}, \quad A \cdot \delta(t); \quad S(f) = S(0) = A$$

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} h(\tau-t) x(t) dt$$

$$F(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Vzájemná kor. fce: $f(t) \approx x(t)$

$$C(\tau) = \langle f(t) \cdot x(t+\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t+\tau) x(t) dt$$

$$C(\tau) = \quad f(t+\tau) = \int_0^{\infty} h(s) x(t+\tau-s) ds$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\omega T} \int_0^T h(s) x(t+\tau-s) x(t) ds dt$$

$$\int_0^{\infty} h(s) \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t+\tau-s) x(t) dt}_{\delta(\tau-s)} ds = \int_0^{\infty} h(s) \delta(\tau-s) ds = h(\tau)$$

2 Autokorelační fce signálu prošlého filtrem:

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t+\tau) \cdot f(t) dt$$

odvaz $\longleftrightarrow T$

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_0^T x(t+\tau-s) \cdot h(s) ds \right) \cdot \int_0^T x(t-v) h(v) dv dt$$

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T h(s) \cdot h(v) \cdot \underbrace{\int_0^T x(t+\tau-s) x(t-v) dt}_{\delta(\tau-s+v)} ds dv$$

$$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T h(s) \cdot h(v) \cdot \delta(\tau-s+v) ds dv$$

$$R(\tau) = \int_0^T h(v) h(\tau+v) dv$$

autokor. fce impulsové
odvaz.

Analytický signál:

Hledáme příběh $z_x(t)$ odpovídající $x(t)$ tak, aby

F. obraz $Z_x(\nu) = \text{F.T.}[z_x(t)]$ byl pro $\nu < 0$ identicky roven 0

a pro $\nu \geq 0$ $Z_x(\nu) = 2X(\nu)$

Funkce $z_x(t)$ bude komplexní a $\text{Re}[z_x(t)] = x(t)$

$$\Rightarrow z_x(t) = \text{Re}[z_x(t)] + j \text{Im}[z_x(t)] \quad Z_x(\nu) = \begin{cases} 2X(\nu) & ; \nu \geq 0 \\ 0 & ; \nu < 0 \end{cases}$$

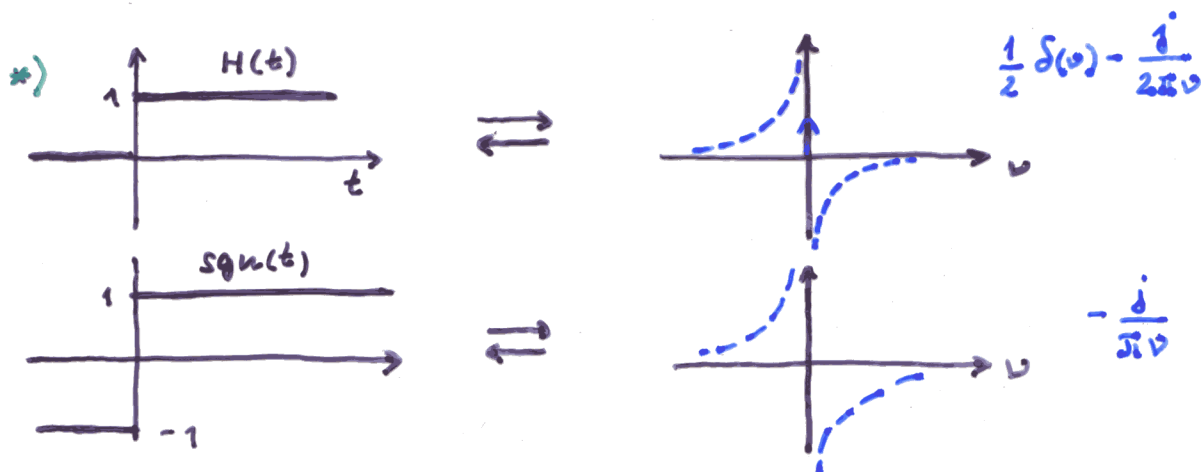
$$Z_x(\nu) = \text{Re}[Z_x(\nu)] + j \text{Im}[Z_x(\nu)]$$

$$Z_x(\nu) = X(\nu) + X(\nu) \cdot \text{sign} \nu \quad \text{sign} \nu = \begin{cases} 1 & ; \nu \geq 0 \\ -1 & ; \nu < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_x(t) = \text{F.T.}^{-1}[Z_x(\nu)]$$

$$z_x(t) = \text{F.T.}^{-1}[X(\nu)] + \text{F.T.}^{-1}[X(\nu) \text{sign}(\nu)] \quad *$$

$$z_x(t) = x(t) + x(t) * \left(-j \frac{1}{\pi t}\right)$$



✓ Hilbertova transformace funkce $x(t)$

$$z_x(t) = x(t) - j \left[x(t) * \frac{1}{\pi t} \right]$$

$$\text{H.T.}[x(t)] = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\theta)}{t-\theta} d\theta$$

$$z_x(t) = x(t) - j \text{H.T.}[x(t)] \quad \text{— analytický signál pro } x(t)$$

$$x(t) * \frac{1}{\pi t} \iff -j X(\nu) \cdot \text{sign} \nu \Rightarrow \text{pro realizaci H.T. je potřeba}$$

"filtrovat" signál filtrem s charakteristikou $-j \text{sign} \nu$. Takový filtr provádí fázový posuv kladných frekvencí o $-\frac{\pi}{2}$ a záporných o $\frac{\pi}{2}$; t.j. filtr posouvá fázi o fázový úhel $\frac{\pi}{2}$.

CAMPBELL ův teorém (1909)

Nechť je elementární událost v čase $t = t_i$ odezvou $f(t - t_i)$ v určitém systému tak, že úplná odezva $Y(t)$ je sumou velkého počtu nezávislých odezav $f(t - t_i)$, které jsou náhodné, se shodou frekvencí λ . t.j. $Y(t) = \sum f(t - t_i)$ pro $0 < t < T$.

Pokud $T \gg$ než časová konstanta odezvy $f(t - t_i)$ elementární události, potom: $\bar{Y} = \lambda \int_0^{\infty} f(u) du$

$$\text{var } Y = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2 = \lambda \int_0^{\infty} f^2(u) du \quad (\text{za pp. exist. integr.})$$

Campbell: $\lambda \rightarrow \frac{\overline{\Delta N^2}}{\tau}$, kde $\overline{\Delta N^2}$ je fluktuace počtu element. událostí, které se objeví v časovém intervalu τ , t.j. $\overline{\Delta N^2} \sim \tau$
Pokud se jedná o poissonovský proces: $\overline{\Delta N^2} = \bar{N}$ a $N = \lambda \cdot \tau$

CARSONŮv teorém

(použijte původní symboliku) . $Y(t) = \sum F(t - t_i)$

Nechť $F(u)$ je absolutně integrabilní. Potom Four. tr. funkce $F(u)$
 $\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp(-j\omega u) du$ existuje a spektrální výkonová hustota

$S_Y(f)$ měřící $Y(t)$ je $S_Y(f) = 2 \cdot \lambda \cdot |\Psi(f)|^2$. Jestliže jednotlivé události nejsou identické, je potřeba zavést $|\Psi(f)|^2$

$$\rightarrow x(t) = \sum_{k=1}^K a_k f(t - t_k)$$

a_k - amplituda k -tého pulsu

K - počet pulsů v posloupnosti délky T

$f(t) = 0$ pro $t < 0$

události jsou nezávislé, časy t_k mají Poissonovo rozdělení

$$\overline{x(t)} = \bar{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt, \quad \text{kde } \bar{a} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{K}{T} \dots \text{shodný počet událostí za jedn. času}$$

$\bar{a} \dots$ sh. hodnota amplitud a_k

Spektrální výkonová hustota v případě, že a_k mají symetrické rozdělení vůči "0" $\bar{a} = 0$:

$$\overline{S_x(\omega)} = 2\nu \bar{a}^2 |F(j\omega)|^2$$

Při $\bar{a} \neq 0$: $\overline{S_x(\omega)} = 2\nu \bar{a}^2 |F(j\omega)|^2 + 4\pi \overline{x(t)}^2 \delta(\omega)$

Důkaz: $x(t) \rightleftharpoons X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \sum_{k=1}^K [a_k \exp(-j\omega t_k) F(j\omega)] = F(j\omega) \cdot \sum_{k=1}^K a_k \exp(-j\omega t_k)$$

\rightarrow posunutý F.obraz, o t_k , puls $f(t)$

Spektrální výkonová hustota procesu $x(t)$ bude:

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2|F(j\omega)|^2}{T} \cdot \sum_{k,m=1}^K \overline{a_k a_m \exp[-j\omega(t_k - t_m)]}$$

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |F(j\omega)|^2 \cdot \left\{ \sum_{k=1}^K \overline{a_k^2} + \sum_{k,m=1}^{K'} \overline{a_k a_m \exp[-j\omega(t_k - t_m)]} \right\}$$

$$\overline{S_x(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |F(j\omega)|^2 \cdot \left\{ \sum_{k=1}^K \overline{a_k^2} + \overline{a}^2 \sum' \dots \right\}$$

pro $k \neq m$ a_k a a_m jsou nezávislé!

$K \cdot \bar{a}^2$

Pro případ $\bar{a} = 0$:

$$\overline{S_x(\omega)} = 2\nu \bar{a}^2 |F(j\omega)|^2 \quad \text{c.b.d.}$$

V případě, že $\bar{a}_k \neq 0$: 2. člen pro $k \neq m$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |F(j\omega)|^2 \cdot \sum_{k,m=1}^{K'} \overline{a_k a_m \exp[-j\omega t_k]} \cdot \exp[+j\omega t_m]$$

musí ji zjednodušit $\Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-j\omega t_k} dt_k = \left[\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_k} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sim = \frac{-e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} + \frac{e^{+j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega}$$

$$+ j\omega t_m \quad dt_m \quad \left[\frac{1}{j\omega} e^{j\omega t_m} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sim \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega}$$

$$\text{tj. výsledek} \cdot \left[\frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{j\omega} \right]^2$$

$$\overline{S_x(\omega)} = \frac{2}{T} |F(j\omega)|^2 \cdot \sum \frac{1}{T^2} \overline{a_k a_m} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega^2}{4}}$$

$\frac{K^2 \cdot \bar{a}^2}{T^2}$

$$\overline{S'(\omega^*)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} |F(j\omega)|^2 \cdot v^2 \bar{a}^2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega^2}{4}} = 4 \cdot v^2 \cdot \bar{a}^2 \cdot |F(j\omega)|^2$$

$$\cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(Nt)}{\pi N t^2} = \delta(t)$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 \frac{T}{2}} \rightarrow \pi \delta(\omega)$$

$$\overline{S'(\omega^*)} = 4\pi \cdot \delta(\omega) \cdot v^2 \cdot \bar{a}^2 \cdot |F(0)|^2 =$$

$$= 4\pi \delta(\omega) \cdot [\overline{x(t)}]^2 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad f(t) = 0 \text{ pro } t < 0$$

$$\overline{x(t)} = v \cdot \bar{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

W-On kordin \rightsquigarrow autokorekční funkce

$$\overline{\varphi_X(\tau)} = \frac{2va^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cos \omega \tau d\omega + 2[\overline{x(t)}]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \cos \omega \tau d\omega =$$

$$= \frac{va^2}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \cos \omega \tau d\omega + \overline{x(t)}^2$$

Využití Parsevalovy věty $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2^*(j\omega) d\omega$

$$\overline{\varphi_X(\tau)} = va^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot f(t+\tau) dt + [\overline{x(t)}]^2$$

$$\varphi_X(0) = \overline{x^2}$$

$$\varphi_X(0) = \underbrace{\overline{x^2} - [\overline{x(t)}]^2}_{\text{var } X} + [\overline{x(t)}]^2$$

podle Campbell. +.

$$\text{var } X = \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u) du$$

Pro f máme δ pulz $F(j\omega) = 1$

$$\overline{S_X(\omega)} = 2va^2 + 4\pi [\overline{x(t)}]^2 \delta(\omega) \quad (*)$$

$$\varphi_X(\tau) = va^2 \delta(\tau) + [\overline{x(t)}]^2 \quad (**)$$

Jednoduchý uštrobný žum:

$$① \quad i(t) = -q \sum_{k=1}^K \delta(t - t_k)$$

$$v = \frac{\bar{I}}{q}$$

$$\int \delta(t) dt !!$$

$$-\bar{I} \equiv \overline{i(t)} = -q \cdot v$$

nelze použít Campbell theorem !

lze využít (*) resp (**)

autokorelační funkce:

spektrální funkce:

$$\overline{\varphi_I(\tau)} = q \cdot I \cdot \delta(\tau) + I^2$$

$$S_I(\omega) = 2q \cdot I + 4\pi I^2 \delta(\omega)$$

stejně měrná složka.

② rovinná vakuumová dioda

režim nasycení, potenciál anody V_a , vzdálenost elektrod: d

jaké jsou zde proudové pulsy?

$$i(t) = e \cdot n(t) \cdot \frac{1}{d}$$

$$\frac{V_a}{d} \cdot \frac{e}{m} = \text{zrychlení}$$

$$n(t) = \frac{2d}{\tau^2} \cdot t$$

$$\tau = \frac{2d}{v_a} \quad \tau = \frac{2d}{\sqrt{\frac{2eV_a}{m}}}$$

$$\tau^2 = \frac{4d^2 \cdot m}{2eV_a}$$

$$\frac{eV_a}{md} = \frac{2d}{\tau^2} = \text{zrychlení}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i(t) = \frac{2e(t-t_i)}{\tau^2} \end{array} \right. \text{ pro } t_i \leq t \leq t_i + \tau$$

proudový puls vykazuje elektronem emitovaným v čase t_i

$$\text{pkt' } \int_{t_i}^{t_i+\tau} i(t) dt = e$$

$$\psi(f) = \int_0^{\tau} \frac{2eu}{\tau^2} \exp(-j\omega u) du = e \cdot \varphi_3(j\omega\tau), \text{ kde } \varphi_3(j\omega\tau) = \frac{2}{(j\omega\tau)^2} [1 - e^{-j\omega\tau} - j\omega\tau e^{-j\omega\tau}]$$

$$\lambda = \frac{\bar{I}}{e} \text{ četnost pulsů}$$

[per partes jako $\int x e^x]$

$$S_I(f) = \frac{2 \cdot \bar{I}}{e} \cdot |\psi(f)|^2 = 2 \cdot e \bar{I} \cdot \text{Parsevalův t. : } S_y(f) = 2 \cdot \lambda \cdot |\psi(f)|^2$$

$\sqrt{\varphi_3(j\omega\tau)}^2 \quad ??$

obvykle $\tau \approx 10^{-9} \text{ s} \Rightarrow |\varphi_3(j\omega\tau)|^2 \rightarrow 1$ při $\omega\tau < \pi$

Spektrum je "bílé" do frekvencí několik stovek MHz

POISSONOVSKÝ PROCES

tok náhodných jevů

a) výskyt jevů je stacionární

[v kterémkoliv intervalu o délce τ je vždy stejná pravděpodobnost výskytu daného počtu jevů]

b) výskyt jevů je vzájemně nezávislý

c) pravděpodobnost výskytu více než jednoho jevu A v dostatečně malém intervalu $\Delta\tau$ je zanedbatelně malá ve srovnání s pravděpodobností výskytu jednoho jevu v téže intervalu

$$P(k, \tau) \quad P(k, \Delta\tau) \approx 0 \text{ pro } k > 1$$

ν - průměrný počet jevů za jednotku času (intenzita, hustota)

$\bar{k} = \lambda = \nu \cdot \tau$ [průměrný počet jevů za dobu τ]

$$P(k, \tau) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}} \quad (k=0,1,\dots)$$

$$\text{var } k = \bar{k}$$

① Pravděpodobnost, že v intervalu τ se jev A (událost) vyskytne alespoň 1x, pro $k \geq 1$ (opětující je \bar{A} ($k=0$))

$$P(k \geq 1, \tau) = 1 - P(0, \tau) = 1 - e^{-\nu\tau}$$

② Rozdělení délky intervalů T mezi sousedními jevy:

$$P(T > t) = P(0, t) = e^{-\nu t}$$

Pravděpodobnost, že délka intervalu bude větší než nějaká hodnota t odpovídá tomu, že v intervalu t se nevyskytl žádný jev

③ Pravděpodobnost, že interval mezi 2 jevy bude menší než t

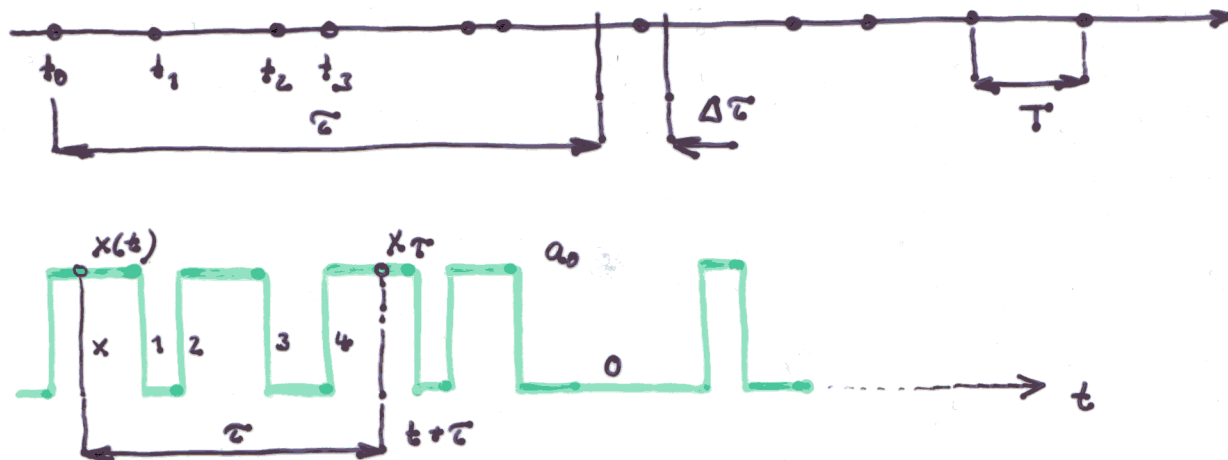
$$P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\nu t} \quad \text{pro } t > 0$$

DISTRIBUČNÍ FCE VÝČINNÝ T

$$w(t) = \frac{dP(T < t)}{dt} = \nu e^{-\nu t} \quad t > 0$$

UNIPOLÁRNÍ POISSONOVSKÝ IMPULSNÍ NAHODNÝ PROCES

– všechny hrany impulsů (přechodů) tvoří poissonovský tok



Dva možné stavy a_0 a 0 : $P[x(t) = a_0] = P[x(t) = 0] = 0.5$

$R(\tau) = ?$

$\overline{x(t)x(t+\tau)}$

$x \cdot x_\tau = a_0 \cdot a_0$ s předpokladem $P(x=a_0, x_\tau=a_0)$
 $0 \cdot a_0 \sim P(x=0, x_\tau=a_0)$
 $a_0 \cdot 0 \sim P(x=a_0, x_\tau=0)$
 $0 \cdot 0 \sim P(x=0, x_\tau=0)$

$$R(\tau) = \overline{x \cdot x_\tau} = a_0 \cdot a_0 \cdot P(x=a_0, x_\tau=a_0) + 0 \cdot a_0 \cdot P(x=0, x_\tau=a_0) + a_0 \cdot 0 \cdot P(x=a_0, x_\tau=0) + 0 \cdot 0 \cdot P(x=0, x_\tau=0) = a_0^2 P(x=a_0, x_\tau=a_0)$$

Jev $x \cdot x_\tau = a_0 \cdot a_0$ nastane tehdy, bude-li v intervalu τ sudý počet n přechodů, t_j :

$$P(x=a_0, x_\tau=a_0) = P(x=a_0, n \text{ sudý}) = P(x=a_0) P(n \text{ sudý}) = \frac{1}{2} P(n=0 \vee 2 \vee 4 \vee \dots) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} P(2k, \tau)$$

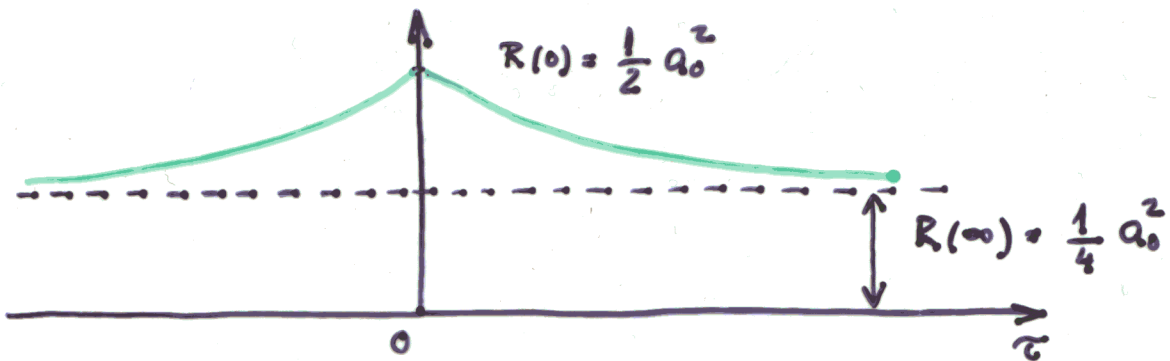
$$\text{kde } P(2k, \tau) = \frac{(\nu\tau)^{2k}}{(2k)!} e^{-\nu\tau}$$

$$P(x=a_0, x_\tau=a_0) = \frac{1}{2} e^{-\nu\tau} \left[1 + \frac{(\nu\tau)^2}{2!} + \frac{(\nu\tau)^4}{4!} + \dots \right] = \frac{1}{2} e^{-\nu\tau} \cosh(\nu\tau) = \frac{1}{2} e^{-\nu\tau} \frac{e^{\nu\tau} + e^{-\nu\tau}}{2} = \frac{1}{4} [1 + e^{-2\nu\tau}]$$

$$R(\tau) = \frac{1}{4} a_0^2 [1 + e^{-2\nu|\tau|}]$$

$$R(0) = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2} a_0^2$$

$$R(\infty) = \overline{x(t)}^2 = \frac{1}{4} a_0^2$$



Energetisches Spektrum:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} a_0^2 e^{-j\omega\tau} d\tau}_I + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} a_0^2 e^{-2\nu|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau}_{II}$$

1. n.z.: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(f-f_0) e^{j2\pi ft} df = A e^{j2\pi f_0 t}$

oder $F(f) = A \delta(f-f_0)$ $F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j2\pi (f-f_0)t} dt = A \cdot \delta(f-f_0)$$

a pro $f_0=0$ $S_1(f) = \frac{1}{4} a_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} a_0^2 \delta(f)$

$$S_{II}(f) = \frac{1}{4} a_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\nu|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4} a_0^2 \int_{-\infty}^0 e^{\tau(2\nu-j\omega)} d\tau + \frac{1}{4} a_0^2 \int_0^{\infty} e^{-\tau(2\nu+j\omega)} d\tau$$

$$= \frac{\nu}{4\nu^2 + \omega^2} a_0^2$$

