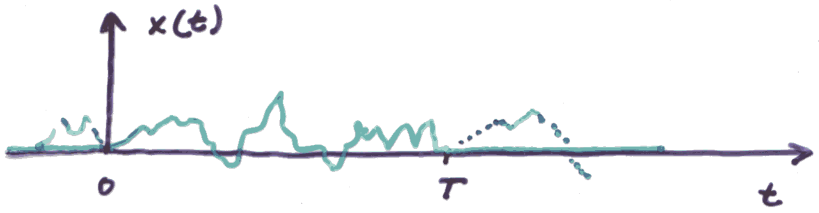
Charakter měřeného signálu:

1. Signál měříme omezenou dobu
2. Ze signálu "odebíráme" časové vzorky → sada diskrétních hodnot v časových okamžicích t_m, hodnota vzorku bývá kvantována (A/D)
3. Signál odebíraný ze systému bývá zesilován

zpracováváme signál filtrovaný přenosovou cestou.

1. FILTRACE V ČASE

Každý signál s trváním T lze vyjádřit pomocí řady:



$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m \, e^{j\frac{2\pi}{T} m \cdot t} \qquad X_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{T} m\cdot t}\, dt.$$

fyzikální funkce: známé na intervalu $\langle 0, T\rangle$

1. Pokud je vně $\langle 0, T\rangle$ $x(t)=0$, lze stanovit spektrum signálu s libovolnou přesností
2. Jinak nebereme v úvahu chování $x(t)$ vně $\langle 0, T\rangle$.

Ukážeme, že v tomto případě je spektrum signálu stejné, jako kdyby tato funkce byla zadána v konečném počtu bodů m. Spektrum je známo jen pro diskrétní frekvence s krokem $\frac{1}{T}$ t.j. jako pro funkci s periodou T.

→ pokrač:

P.p. že známe měřenou funkci v n bodech vzdálených od sebe T_v, frekvence vzorkování je tedy $F_v = \frac{1}{T_v}$; $n \cdot T_v = T$.

Ukážeme, že nemůžeme získat více než $\frac{n}{2}$ bodů spektra:
hodnota rozlišení ve spektru bude $\Delta\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{n \cdot T_v}$,

Nechť B je délka spektrálního intervalu zadané funkce.
Podle vzorkovacího teorému $F_v \geq 2B$

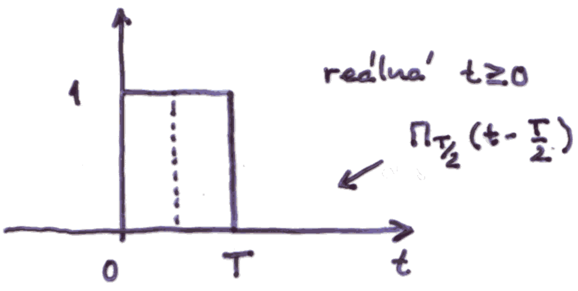
$$F_v = \frac{1}{T_v} = 2\alpha \cdot B \quad \alpha \geq 1$$

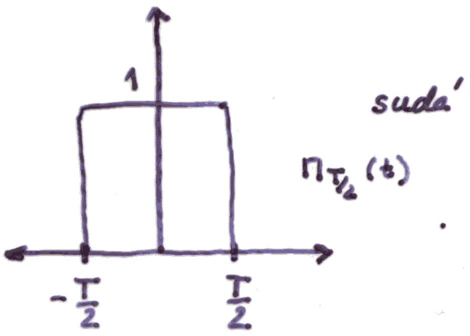
$\Rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{n \cdot T_v} = 2\alpha B/n$, proto maximální počet bodů spektra:

$$\frac{B}{\Delta\nu} = \frac{n}{2\alpha} = \frac{n}{2} \quad \text{pro } \alpha = 1$$

(Veškerá informace o funkci je obsažena v těchto $\frac{n}{2}$ bodech)

Okénková funkce:





$f(t)$ na $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$
$f(t - \frac{T}{2})$ na $(0, T)$

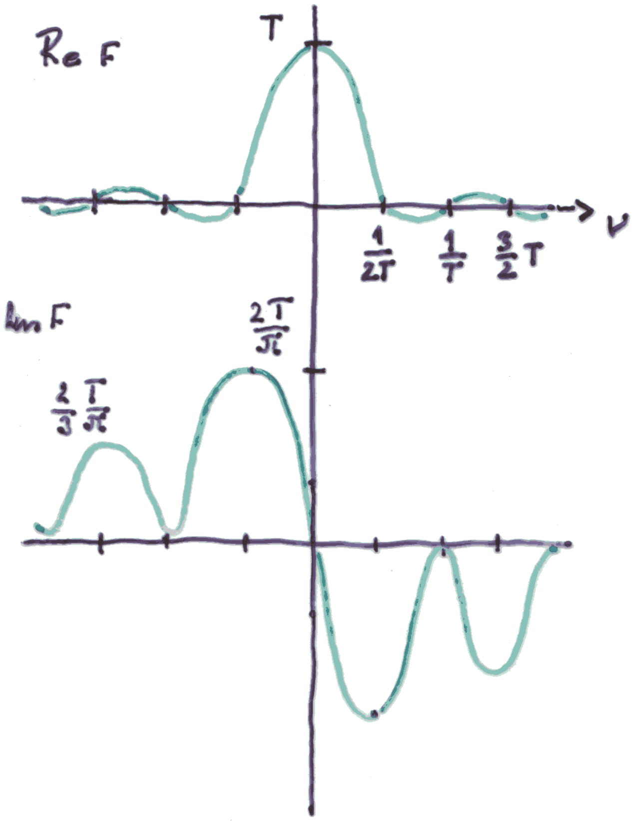
F.T. $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi\nu t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos 2\pi\nu t \, dt = \frac{1}{2\pi\nu}\left[\sin 2\pi\nu t\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = T \cdot \frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}.$$

Pro posunutou funkci $\Pi_{T/2}(t - \frac{T}{2}) \rightleftarrows F(\nu) \cdot e^{-j2\pi\nu\frac{T}{2}}$

Fourierův obraz okénkové funkce na $(0,T)$:

$$T\cdot\frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}\cdot e^{-j2\pi\nu\frac{T}{2}} = T\,\frac{\sin \pi\nu T}{\pi\nu T}\left(\cos\pi\nu T - j\sin\pi\nu T\right)$$

$$= T\,\frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} - jT\,\frac{\sin^2 \pi\nu T}{\pi^2\nu^2T^2}\cdot \pi\nu T$$



nulové body $2\pi\nu T = k\pi$

$\nu = \frac{k}{2T}$

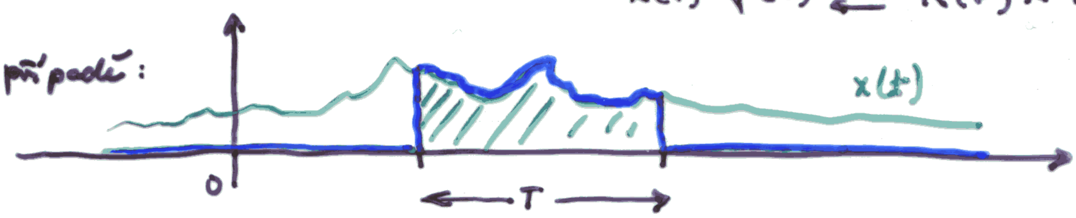
nulové body $\pi\nu T = k\pi$

$\nu = \frac{k}{T}$

Spektrum signálu násobeného okénkovou funkcí $\Pi_{T/2}\left(t-\frac{T}{2}\right)$ bude rovno konvoluci spektra původního signálu a spektra dané okénkové funkce:

$$x(t)\cdot f(t) \rightleftarrows X(\nu) * F(\nu)$$

V případě:



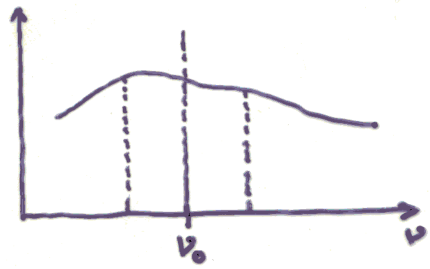
při $T \longrightarrow \infty$ $\quad F(\nu) \longrightarrow \delta(\nu)$

efekt filtrace je malý!

Filtrace ve frekvenci:

$X_F(\nu) = X(\nu) \cdot H(\nu)$ funkce odpovídající filtru

(frekvenční charakteristika filtru)



Součin $X(\nu)\,H(\nu)$ nelze "měřit" ve frekvenční reprezentaci signálu!

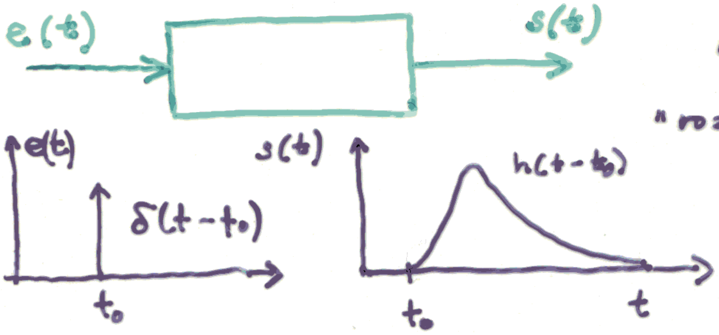
registrujeme pouze $x(t)$! v časové oblasti.

$$x_F(t) = x(t) * h(t) = \int_0^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Konvoluce: $\int_0^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ v okamžiku t se uplatní všechny hodnoty $\tau \le t$,

neboť $h(t')$ je definována pro $t' \ge 0$

odezvová funkce systému.



Operace měřícího přístroje → "rozmazané" zobrazení sledovaného objektu.

odezva na δ funkci.

Předpokládáme, že libovolný vstupní signál lze rozložit na posloupnost impulsů šířky Δt, jejichž amplitudy jsou rovny hodnotě signálu v daném časovém okamžiku.

$e(0),\ e(\Delta t) \ldots,\ e(k\cdot\Delta t)$ ← amplitudy v čase t

Označme $h_1(t)$ odezvu systému na impuls délky Δt s amplitudou $\frac{1}{\Delta t}$

t.j.: $h_1(t)\cdot\Delta t$ je odezva systému na jednotkový puls délky Δt.

Lineární superpozice

$s_0 = e(0) \cdot h_1(t) \cdot \Delta t$

$s_{\Delta t} = e(\Delta t) \cdot h_1(t - \Delta t) \cdot \Delta t$ .... na událost v čase Δt systém reaguje ničí odezvě na událost v čase 0 opožděnou o Δt

$\vdots$

$s_{k\Delta t} = e(k \cdot \Delta t) \cdot h_1(t - k\Delta t) \cdot \Delta t$

$$S(t) = \sum_{k=0}^{l} e(k \cdot \Delta t) \cdot h_1(t - k \cdot \Delta t)\, \Delta t \qquad l = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \quad (\text{celá část})$$

resp.

$$s(t) = \int_0^{\infty} e(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\ ;$$ omezení budicí signálu => místo t lze napsat ∞;

lze rozšířit i pro záporné časy (pro $t - \tau < 0$ je integrand 0)

$s(t) = e(t) * h(t)$

distributivní
komutativní
asociativní

} ← operace <u>konvoluce</u>.

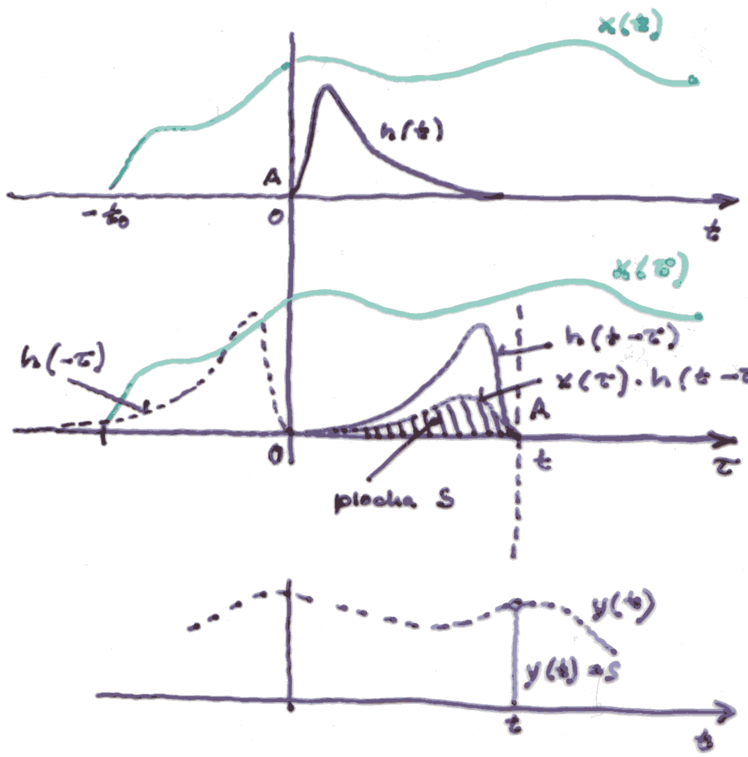
Řešené úlohy:

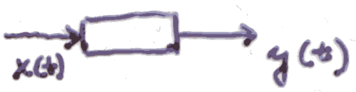
1. Ze znalosti vstupního a výstupního signálu určit impulsní odezvu lineárního systému → $h(t)$
   PROBLÉM IDENTIFIKACE SYSTÉMU

2. Ze znalosti výstupního signálu a impulsové odezvy určit vstupní signál → $x(t)$ resp. $e(t)$

   OBRÁCENÁ ÚLOHA

přenos signálu lineárním kanálem:





$$y(t) = x(t) * h(t)$$

V obecném případě hledání funkce $h(t)$ resp. $x(t)$ ze zadaných funkcí $x(t)$ a $y(t)$ resp. $y(t)$ a $h(t)$ nemá úloha řešení!

Vyjma některých případů (zřídkavých) nelze odezvu systému, či vstupní signál lineárního systému nalézt

DEKONVOLUCE

$$h(t) = y(t) \overset{*}{*} x(t)$$

$$x(t) = y(t) \overset{*}{*} h(t)$$ nemají vždy řešení, mohou mít ∞ řešení.

V případě hledání impulsní odezvy pro reálný lineární systém - odezva existuje a je jediná. Operace je ovšem nestabilní vzhledem ke změnám funkcí $y(t)$ a $x(t)$. Místo přesných signálů $y(t)$ a $x(t)$ se registrují $y'(t)$ a $x'(t)$ s chybami $\alpha(t)$ a $\beta(t)$

řešení rovnice $h'(t) = [y(t)+\beta(t)] \overset{*}{*} [x(t)+\alpha(t)]$ se bude podstatně lišit od hledaného $h(t)$, dokonce i v případě malých $\alpha(t)$ a $\beta(t)$!

Problém filtrace:

1.) Časová filtrace je ekvivalentní konvoluci ve frekvenci

2.) Filtrace ve frekvenci je ekvivalentní konvoluci v čase

* Při časové filtraci → konvoluce, nicméně signál je vždy v reprezentaci $x(t)$
* Každý "přenos" (měřicí přístroj) registruje pouze omezené spektrum frekvencí

⇒ spektrum měřeného signálu bude vždy FILTROVÁNO

Každý reálný měřený signál $x(t)$ je konvolucí požadovaného signálu a impulsové odezvy měřicího zařízení.

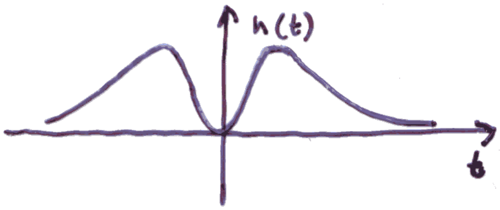
Protože $x(t)$ se registruje omezenou dobu, vede to ke změně spektra signálu.

lineární filtry, reálné $\quad h(t) = 0$ pro $t < 0$ (příčinnost!)

$$h(t) \rightleftarrows H(\nu) = \mathrm{Re}[H(\nu)] + j\,\mathrm{Im}[H(\nu)] = |H(\nu)| \cdot e^{-j\varphi(\nu)}$$

KAŽDÝ REALIZOVANÝ FILTR POSOUVÁ FÁZI!

IDEÁLNÍ FILTR ?



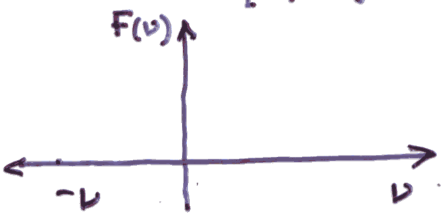
sudé funkce, ovšem $h(t)=0$ pro $t<0$!

$x(t)$ reálné

$$X(\nu) = \mathrm{Re}[X(\nu)] + j\,\mathrm{Im}[X(\nu)]$$
$$\mathrm{Re}[X(-\nu)] = \mathrm{Re}[X(\nu)]$$
$$\mathrm{Im}[X(-\nu)] = -\mathrm{Im}[X(\nu)]$$

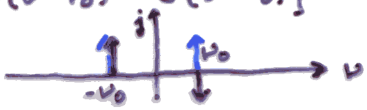
Význam záporných frekvencí

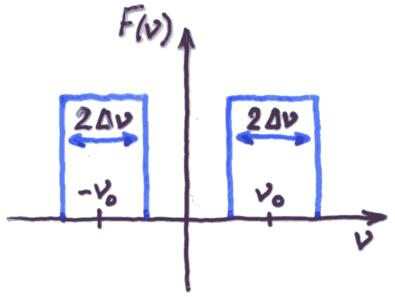
$\rightleftarrows$

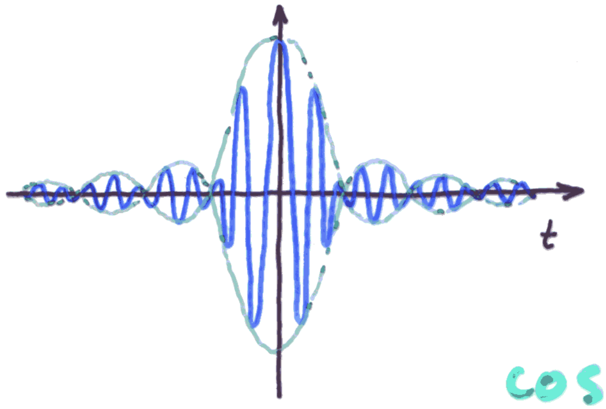


$$\sin 2\pi\nu_0 t \rightleftarrows \frac{1}{2} j [\delta(\nu-\nu_0) - \delta(\nu+\nu_0)]$$

$$\cos 2\pi\nu_0 t \qquad \frac{1}{2}[\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)]$$



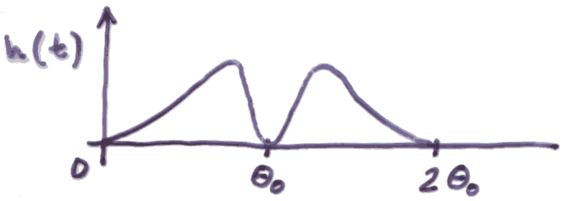




$$f(t) = 2\Delta\nu \, \frac{\sin 2\pi\Delta\nu t}{2\pi\Delta\nu t} \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$$

Ideálnímu frekvenčnímu filtru odpovídá fyzikálně nerealizovatelná impulsní odezva (s nenulovým průběhem pro $t<0$!)

Filtr s lineárním posunem fáze.



$h_1(t)$ - symetrická funkce podle osy $t=0$ odezva nerealizovatelného filtru.

Za předpokladu, že $h_1(t) \neq 0$ na $(-\Theta_0, \Theta_0)$, uvažujme filtr s odezvou $h(t)$ viz. obr. $\underline{h(t) = h_1(t-\Theta_0)}$

$$H(\nu) = H_1(\nu)\, e^{-2\pi j \nu \Theta_0}$$

s posunem fáze $\varphi(\nu) = 2\pi\nu\Theta_0$, který je lineární fcí frekvence

Realisovatelné analogové filtry:

L.T. | přenosová funkce $\quad W(p) = \dfrac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots a_n p^n}$

$W_1(p) = \dfrac{1}{1+Tp}$ $\quad W_2(p) = \dfrac{Tp}{1+Tp}$ "dolno-" "horno-" 1. řádu

$W_3(p) = \dfrac{1}{1+2\xi Tp + T^2p^2}$ $\quad W_4(p) = \dfrac{T^2p^2}{1+2\xi Tp + T^2p^2}$ 2. řádu