ZÁKLADNÍ POJMY PRAVDĚPODOBNOSTI

náhodné veličiny, diskrétní jevy

$p(A)$ ... pravděpodobnost, že nastane jev A

$p(A) \in (0,1)$ - jev náhodný

jev jistý ... $p(A) = 1$

nemožný ... $p(A) = 0$ (nenastane)

Relativní četnost jevu:

jevy A_i : $A_1, A_2, A_3, A_4 \dots A_s$

s - počet různých jevů

při opakování děje N krát dostaneme vždy jeden z možných výsledků : A_i

$p_i^* = p(A_i) = \frac{m_i}{N}$; m_i - četnost jevu A_i

STATISTICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

a) $p_i^* \geq 0$

b) $p_i^* \in \langle 0;1 \rangle$

pravděpodobnost jevu A_i $\quad p_i = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{m_i}{N}$

středování přes počet pozorování ; Miesova, statistická definice (z matematického hlediska není bez závad - pp. existenci limity ; z praktického hl. lze ji experimentálně ověřit)

Jestliže $p(A_1) = p(A_2) = \dots = p(A_s) \Rightarrow p_i = p(A_i) = \frac{1}{s}$

KLASICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI

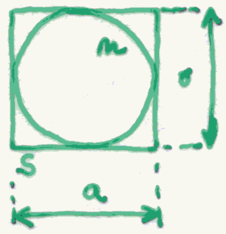
dvě skupiny jevů : $B\,(A_1, A_2, \dots, A_m)$ $\quad C\,(A_{m+1}, \dots, A_s)$

Pravděpodobnost, že se při pozorování vyskytne jeden libovolný jev A_i ze skupiny B, bude dána $\quad p(B) = \frac{m}{s}$

používáme v případech, kdy není důvod proti apriornímu předpokladu, že je stejná možnost výskytu jednotlivých výsledků pozorovaného děje.

Příklad:

$p(A) = \dfrac{\text{míra } m}{\text{míra } s}$



$$\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}$$

Vlastnosti pravděpodobnosti:

Jestliže nastává právě jeden z jevů $A_1, A_2, \dots A_s$, množina možných jevů A_i je **úplná soustava jevů** (A_i - elementární i složené)

Pravděpodobnost, že se vyskytne A_1 nebo A_2

$B = A_1 \vee A_2 \quad \dots \quad m_1 + m_2$

$p(B) = p(A_1 \vee A_2) \doteq p^*(B) = \dfrac{m_1 + m_2}{m} = p(A_1) + p(A_2)$

$p(A_1 \cup A_2) \equiv p(A_1 \text{ nebo } A_2) \equiv p(A_1 + A_2) = p(A_1) + p(A_2)$

$p(A_1 + A_2 + \dots + A_s) = 1 \qquad \sum_{i=1}^{s} p(A_i) = 1$ pro úplnou soustavu

úplná soustava:

2 disjunktní jevy: $A, \bar{A}$ (opačný k A) $\quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Sčítání pravděpodobnosti obecně:

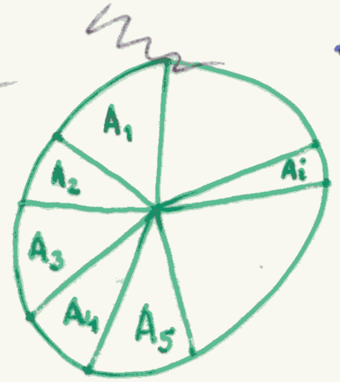
složený jev: ano i ne A; ano i ne B současně

$AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ tvoří úplnou soustavu jevů

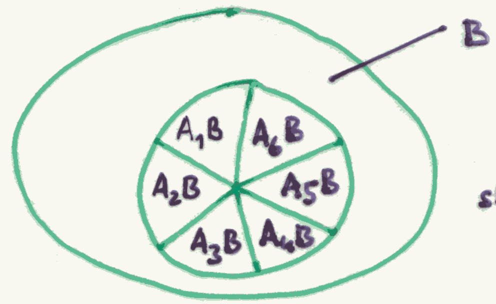
(jevy A, B ani $A, \bar{A}, B, \bar{B}$ netvoří úplnou soustavu !)

obdobně $ABC, \bar{A}BC, A\bar{B}C, AB\bar{C}, \dots$

Příklad:



A_i - disjunktní jevy



složené jevy A_iB

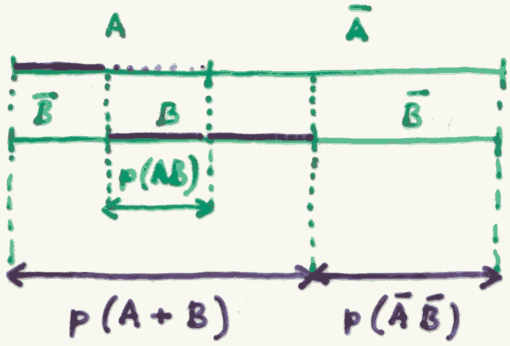
A_i ... vyslání zprávy A_i

B ... zkreslení ; A_iB zkreslení jevu A_i

$p(A_1+A_2) = p(A_1) + p(A_2)$

složený jev: $(AB,\ A\bar{B},\ \bar{A}B,\ \bar{A}\bar{B})$

pravděpodobnost jevu (A nebo B) ; tj. A nebo B nebo AB



$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$$

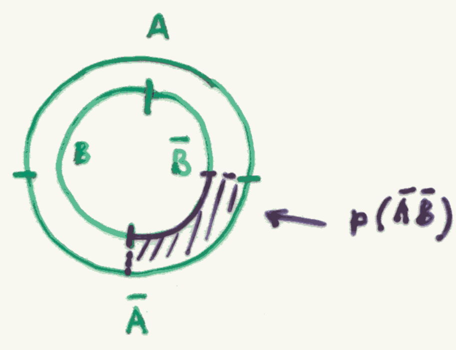
$$p(A+B) = 1 - p(\bar{A}\bar{B})$$

$$\vdots$$

$$p(A+B+C+\ldots) = 1 - p(\bar{A}\bar{B}\bar{C}\ldots)$$

$$p^*(A+B) = \frac{n(A\bar{B}) + n(AB) + n(\bar{A}B)}{N}$$ (pomocí četností jevů)

alternativní znázornění:



PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

Předpokládejme, že byl již pozorován jev B. Jaká je pravděpodobnost, že se vyskytne ještě jev A.

Uvažujeme, že jestliže byl pozorován jev B, v další fázi pozorování se mohou vyskytnout pouze ty složené jevy, které jsou spojeny s výskytem jevu B, tj: AB nebo $\bar{A}B$.

Zavedením podmínky (vyskytl se jev B) se zúžil rozsah původní úplné soustavy N na nový, menší $m(B)$. Pro jev A je příznivý rozsah $m(AB)$.

Na základě definice četnosti $p_B(A) \doteq p_B^*(A) = \dfrac{m(AB)}{m(B)}$

(index B označuje, že jev B apriori nastal)

$P(A|B)$; $$P(A|B) = \frac{\frac{m(AB)}{N}}{\frac{m(B)}{N}} = \frac{p(AB)}{p(B)} \quad \text{resp.} \quad \frac{P(AB)}{P(B)}$$

analogicky $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$;

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \qquad (1)$$

odkud platí:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

v případě $m(A_i B)$, kde $m(B) = \sum_{i=1}^{s} m(A_i B)$

analogicky: $P(A_i|B) = \dfrac{m(A_i B)}{m(B)}$ a pro úplnou soustavu jevů

$$\sum_{i=1}^{s} P(A_i|B) = \frac{\sum_{i=1}^{s} m(A_i B)}{m(B)} = \frac{m(B)}{m(B)} = 1$$

Pozn: $P(A \cap B) \equiv P(AB) = P(A\,a\,B)$ resp $P(A \wedge B)$

Nezávislost jevů.

výskyt jednoho neovlivní možnost výskytu druhého.

A, B - nezávislé $\quad P(A|B) = P(A)$ $\quad$ (3)

$$P(B|A) = P(B)$$

z (1) $\quad P(AB) = P(A)\cdot P(B)$ $\quad$ (2)

$$P(ABC\ldots) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\ldots$$ (teorém o násobení pravd.)

(2) či (3) : nutná podmínka pro nezávislost jevů

$$P(A+B+C+\ldots) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})\ldots$$
$$= 1 - [1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]\ldots$$

Příklad:

Signál s pulsní modulací: posloupnost "míst", na kterých se s pravděpodobností p_1 vyskytne puls či nikoliv $(1-p_1)$. $p_1 = 0.5$. Jaká je pravděpodobnost, že se ve třech sousedních místech vyskytne alespoň jeden puls?

$$(p(A_1 \vee A_2 \vee A_3))$$

BAYESŮV VZTAH

1. děj : jeden z jevů $A_1, A_2, A_3 \ldots A_s$ $\quad \sum_1^s P(A_i) = 1$
2. současně se může náhodně vyskytnout B jev

A_i ... hypotézy

$P(A_i)$ ... apriorní pravděpodobnosti

Jaká je pravděpodobnost výskytu jevu B?

$$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + \ldots + P(A_sB) = \sum_{i=1}^{s} P(A_iB)$$

- jevy A_i a B tvoří složený jev (A_iB)
- obecně mohou být závislé

$$P(A_iB) = P(A_i)\cdot P(B|A_i) = P(B)\cdot P(A_i|B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i B) = \sum_{i=1}^{s} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

VZTAH PRO ÚPLNOU PRAVDĚPODOBNOST

$P(A_i|B)$ $\leftrightarrow$ jaká je pravděpodobnost výskytu jevu A_i jestliže se udál jev B ?

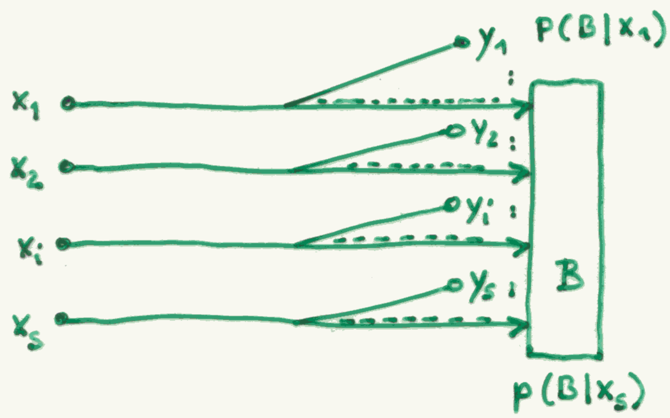
(aposteriorní pravděpodobnost)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{s} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

(BAYESŮV VZTAH)

-má základní význam v teorii sdělování při řešení problému věrohodnosti.

Příklad: Přenos diskrétním kanálem:



Diskrétní zpráva je tvořena výběrem prvků z množiny možných prvků (abeceda)

rušivé procesy $\rightarrow$ zkreslení prvků $\rightarrow$ chybná detekce

B - CHYBA PŘENOSU

$x_i \circ \longrightarrow y_i$

prvek abecedy — odpovídající prvek na výstupu přijímače

$P(X_i)$ pravděpodobnost výskytu prvku x_i v přenášené zprávě

Struktura jednotlivých prvků x_i je rozdílná $\Rightarrow$ tentýž rušivý proces bude na jednotlivé prvky působit různě (pravděpodobnost "vyhodnocení chyby" bude pro různá x_i rozdílná)

$P(B|X_i)$ - pravděpodobnost chyby za p.p. vyslání určitého prvku x_i

Pravděpodobnost $P(B|x_i)$ je určena pouze charakterem rušivých procesů.

CELKOVÁ PRAVDĚPODOBNOST CHYBY : $P(B)$

$B = (x_1 \wedge B) \vee (x_2 \wedge B) \vee \dots (x_S \wedge B)$; $P(B) = P(x_1 B) + P(x_2 B) + \dots$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{S} P(x_i)\, P(B|x_i) \qquad \text{jelikož} \quad P(x_i B) = P(x_i) \cdot P(B|x_i)$$

Příklad:

Zpráva je složena z m prvků. Pravděpodobnost narušení jednotlivých prvků je $P(S_i)$. Zprávu považujeme za zkreslenou při narušení alespoň jednoho prvku. Jaká je pravděpodobnost zkreslení zprávy?

Hledáme pravděpodobnost jevu $P(S)$; $S = S_1 \vee S_2 \vee S_3 \vee \dots S_m$

$P(S) = P(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_m) = 1 - [1 - P(S_1)][1 - P(S_2)] \dots [1 - P(S_m)]$

Za předpokladu $P(S_1) = P(S_i)$; $P(S_1) \ll 1$

$P(S) = 1 - [1 - P(S_1)]^m$

$(1 - \varepsilon)^m \doteq 1 - m\varepsilon$ pro $\varepsilon \ll 1$ $\Rightarrow$ $P(S) \doteq m \cdot P(S_1)$

Příklad:

Mějme binární signál. Pravděpodobnost výskytu impulsu na libovolném místě signálu je $P(A)$. Jaká je pravděpodobnost, že po m prázdných místech se vyskytne impuls? Výskyt impulsů je nezávislý.

Výskyt impulsu – jev A, prázdné místo $\bar{A}$

Vycházíme z jednotlivých pozorování neomezené posloupnosti takových jevů. Bereme v úvahu pouze příznivé výsledky (dojde k požadované události).

Počátek každého pozorování se bude vyskytovat náhodně!
Budeme pozorovat nejprve $\underline{k}$ prázdných míst, pak se objeví první impuls, bude následovat $\underline{m}$ prázdných míst a posléze druhý impuls.

Pravděpodobnost tohoto příznivého pozorování tj. složeného jevu

$$P(m,k) = P[(k \text{ krát výskyt jevu } \bar{A} \text{ a } A) \text{ a } (m \text{ krát výskyt } \bar{A} \text{ a } A)]$$
$$= [P(\bar{A})]^{k+m} \cdot [P(A)]^2$$

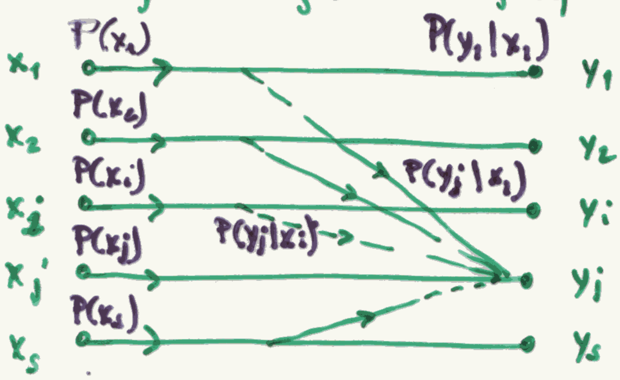
Při daném $\underline{m}$ může $\underline{k}$ nabývat obecné hodnot $0 \leq k \leq \infty$ a každá z nich je příznivá sledovanému jevu. tj:

$$P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} [P(\bar{A})]^{k+m} [P(A)]^2 = \frac{[P(\bar{A})]^m}{1 - P(\bar{A})} \cdot [P(A)]^2$$

s využitím $1 - P(\bar{A}) = P(A)$

$$P(m) = [1 - P(A)]^m \cdot P(A) \qquad \left(a_0 = [P(\bar{A})]^m ;\ q = P(\bar{A}) ;\ \Sigma = \frac{a_0}{1-q} \right)$$

Příklad:
Prvek x_1 může být v přijímači vyhodnocen jako x_2, nebo kterýkoliv jiný. To znamená, že přijmeme-li prvek x_2, nemůžeme s naprostou jistotou tvrdit, že byl také vyslán. Jaký byl vyslán prvek?



$P(y_j|x_i)$ – pravděpodobnost chybového přechodu od prvku x_i k prvku y_j.

Pravděpodobnost výskytu y_j na výstupu přijímače: $y_j = (x_1 \wedge y_j) \vee (x_2 \wedge y_j) \vee \ldots$

$$P(y_j) = P(x_1 y_j) + P(x_2 y_j) + \ldots + P(x_s y_j)$$
$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{s} P(x_i)\, P(y_j|x_i)$$

Pokud se na výstupu objevil prvek y_j, pravděpodobnost, že za těchto podmínek byl vyslán prvek x_i t.j. $P(x_i|y_j)$ je dán B. vztahem

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(x_i y_j)}{P(y_j)} = \frac{P(x_i)\, P(y_j|x_i)}{\sum P(x_i)\, P(y_j|x_i)}$$