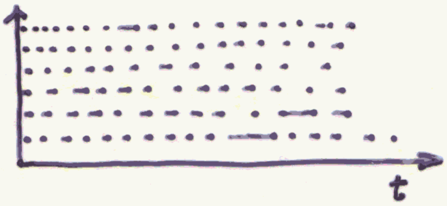
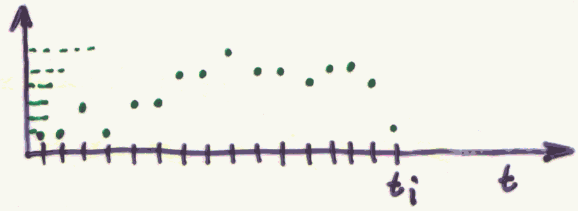
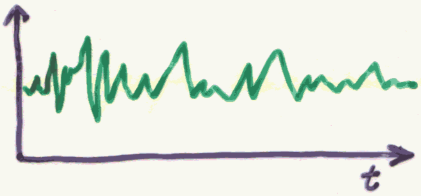
NÁHODNÁ VELIČINA

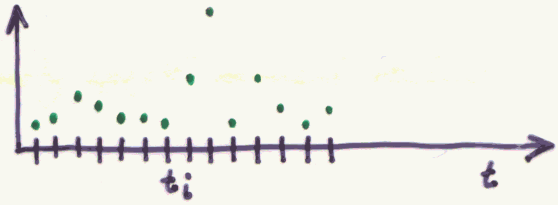
diskrétní



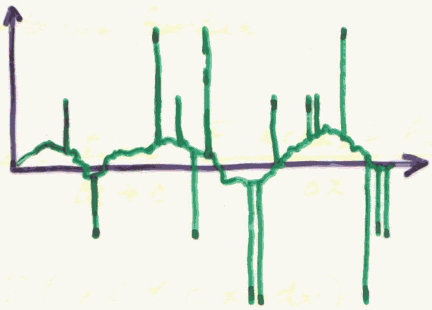


spojitá





smíšená



Rozdělení pravděpodobnosti.

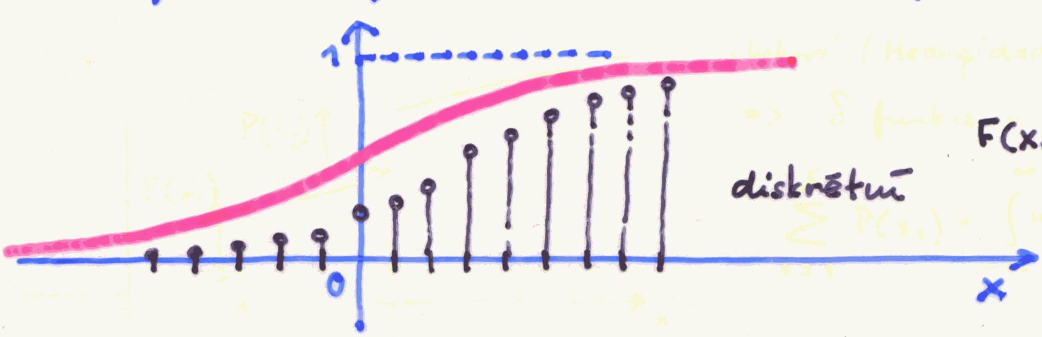
možné hodnoty (realizace) $x_1, x_2, x_3, \dots x_s$ náhodné veličiny X považujeme za náhodné jevy

$P(X = x_i)$, $P(x_i)$, p_i ; pro úplnou soustavu $\sum_{i=1}^{s} P(x_i) = 1$

přiřazení pravděpodobnosti $\rightarrow$ rozdělení pravděpodobnosti

DISTRIBUČNÍ FUNKCE

$F(x) = P(X < x)$ $\quad x \rightarrow \infty \quad F(x) \rightarrow 1$; $\quad x \rightarrow -\infty \quad F(x) \rightarrow 0$



diskrétní

$F(x_i) = P(X < x_i)$

distribuční funkce:

spojitá náhodná veličina: kvantil x_p hodnota náhodné veličiny X odpovídající zadané hodnotě distribuční funkce $F(x)=p$

$F(x) = 0.72 = P(X < x_{0.72})$ .... kvantil $x_{0.72}$

kvantil $x_{0.5}$ ... MEDIÁN M_e ; $P(X < M_e) = P(X > M_e)$

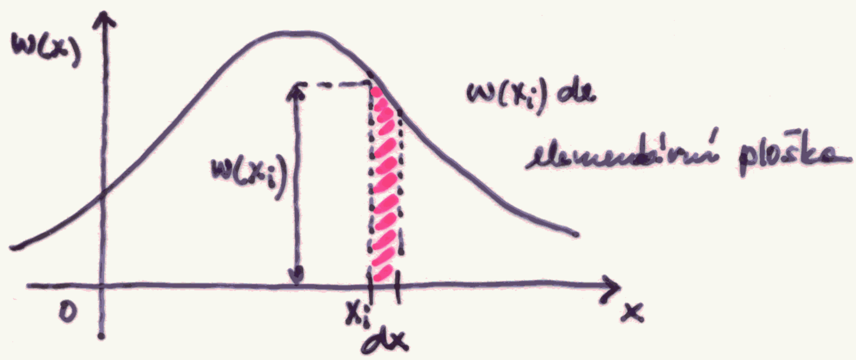
Pravděpodobnost výskytu konkrétní hodnoty spojité náhodné veličiny je nulová

Hustota rozdělení pravděpodobnosti:

derivace distribuční funkce

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \overset{dx}{\Delta x})}{\underset{dx}{\Delta x}}$$

$$w(x)\,dx = P(x < X < x + dx)$$

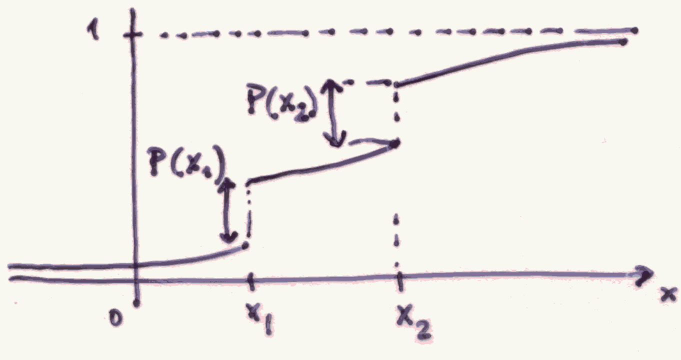


$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} w(x)\,dx$$

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} w(x)\,dx = P(-\infty < X < x_1)$$

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1 = P(-\infty < X < \infty)$$

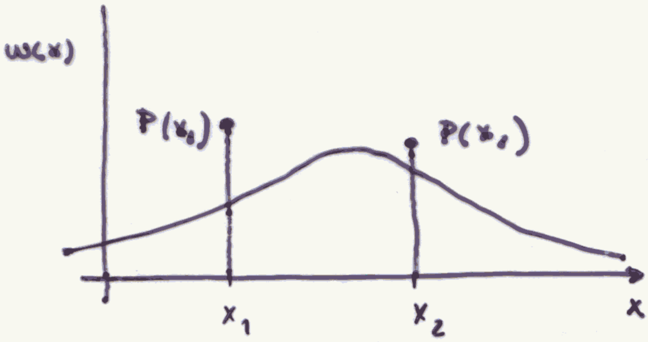
Smíšené náhodné veličiny



skoková (Heavisideova) funkce

$\Rightarrow$ δ funkce o výšce $P(x_i)$ v bodě x_i

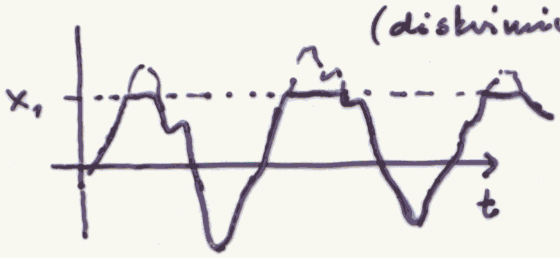
$$\sum_{i=1}^{s} P(x_i) + \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\,dx = 1$$



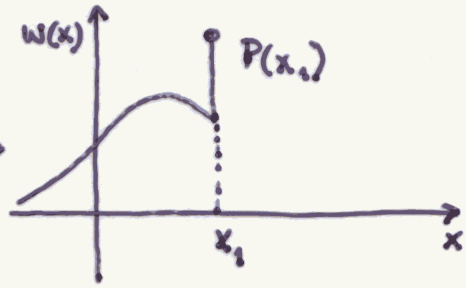
Příklad

amplitudově omezený signál:

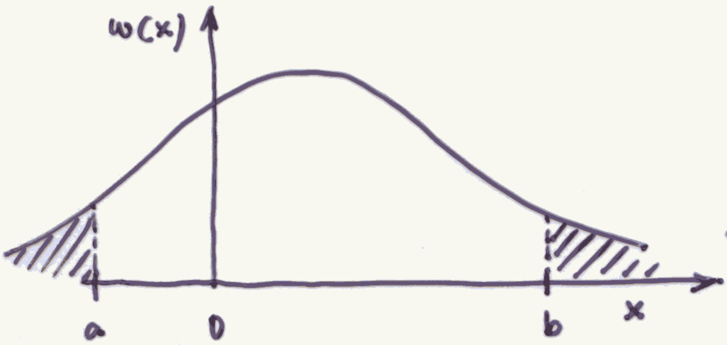
(diskriminátor)

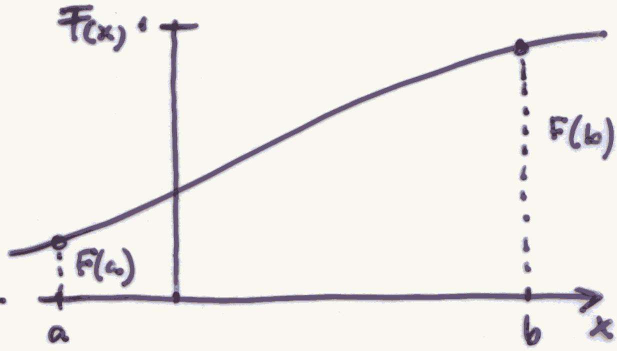


$\Rightarrow$



Useknuté rozdělení:

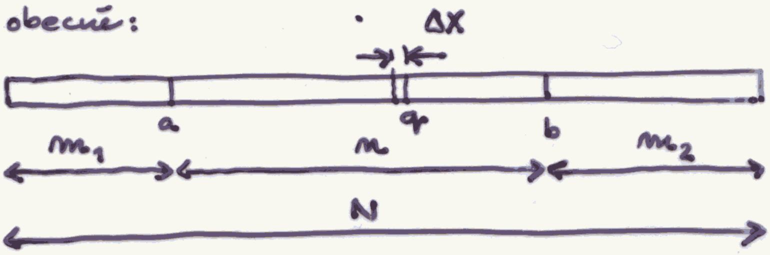




n. veličina X, $w(x)$, $F(x)$

<u>výběr</u>: interval pozorování (a,b) .... $w'(x)$ nové náh. veličiny

obecně:



pro $N \to \infty$

n četnosti $\to$ pravděpodobnosti

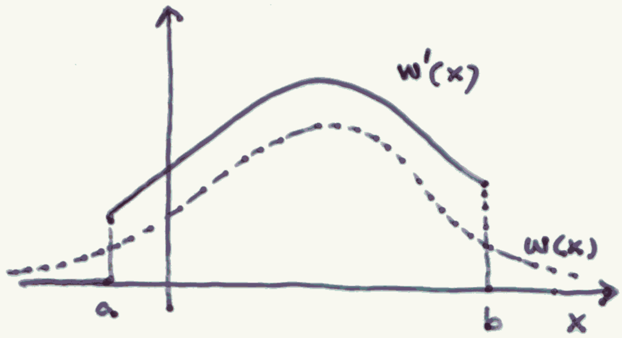
$$P_{ab} = \frac{n}{N} = F(b) - F(a)$$

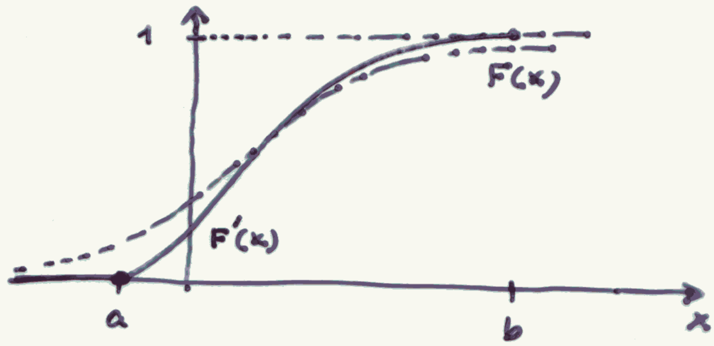
$$P_{\Delta x} = \frac{q}{N} \doteq w(x)\cdot\Delta x \quad ; \quad \text{pro useknutou soustavu} \quad P'_{\Delta x} = \frac{q}{n} \doteq w'(x)\,dx$$

$$\Rightarrow P'_{\Delta x} = \frac{N}{n}\cdot P_{\Delta x} = \frac{P_{\Delta x}}{P_{ab}} = \frac{P_{\Delta x}}{F(b)-F(a)} \qquad w'(x) = \frac{w(x)}{F(b)-F(a)}$$

a platí podmínka $\int_a^b w'(x)\,dx = \int_a^b \frac{w(x)}{F(b)-F(a)}\,dx = 1$

Pro distribuční funkci: $F'(x) = P'(X<x) = \int_a^x w'(x)\,dx = \frac{F(x)-F(a)}{F(b)-F(a)}$





Příklad: generace náhodných čísel s Gaussovým rozdělením v využitím centrální limitní věty

$RND(x) \in \langle 0,1 \rangle$ $\qquad \bar{a} = 0.5$ $\qquad \mathrm{var}\, a = \frac{1}{12}$

$6x \qquad \sum_{i=1}^{6} a_i$ $\qquad \bar{m} = 3$ $\qquad \mathrm{var}\, m = 0.5$

$\sigma^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.707$

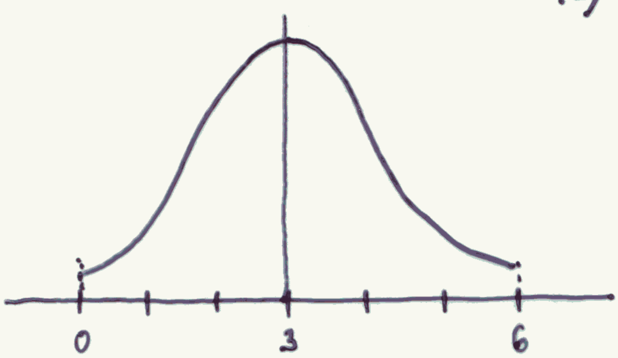
[Náhodná veličina a, realizace a_i, rovnoměrné rozdělení na $\langle 0,1 \rangle$

$m = \sum_{i=1}^{N} a_i \qquad \bar{m} = N \cdot \bar{a}$

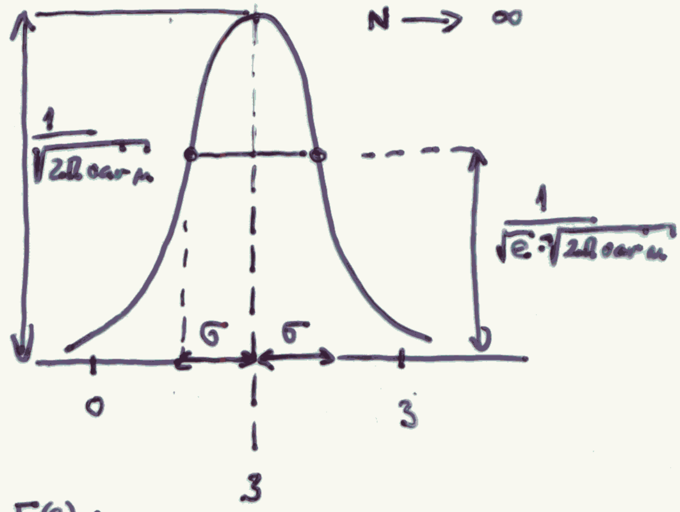
$\mathrm{var}\, m = N \cdot \mathrm{var}\, a$ $\qquad$ platí pro N <u>velká</u>]

$$w(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{var}\, m}} \exp\left[-\frac{(m-\bar{m})^2}{2\,\mathrm{var}\, m}\right]$$

$$w'(m) = \frac{w(m)}{F(b)-F(a)}$$



známe σ



$F(3) =$

$F(0) =$

ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN

Momenty rozdělení n. veličiny

Rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce nebo hustota rozdělení jsou
- vyčerpávající charakteristiky.

obsahují maximální poznatky o náhodné veličině.

V praktických aplikacích stačí znát některé charakteristické rysy těchto charakteristik, které určují pouze některé, zcela určité vlastnosti náhodné veličiny.

Vyjadřují je tzv. číselné charakteristiky
definované jako <u>MOMENTY ROZDĚLENÍ</u>.

<u>Diskrétní náh. vel.</u>:

střední aritmetická hodnota

$$m_x = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_s n_s}{N} = \sum_{i=1}^{s} x_i \frac{n_i}{N}$$

$\frac{n_i}{N} \to p_i^*$ rel. četnost jevu x_i

$$m_x = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i^*$$

Při více pozorováních budou hodnoty p_i^* fluktuovat okolo p_i, analogicky se budou chovat průměry m_x

hodnota, kolem které fluktuují průměry se nazývá <u>střední hodnota</u> náhodné veličiny x $\quad \bar{x}, \langle x \rangle, M[x]$

také $\quad m_x, m_1[x], E[x]$

v limitě $N \to \infty \quad p_i^* \to p_i \quad m_x \to M[x]$

$$M[x] = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i$$

obecně lze zavést aritmetický průměr k-té mocniny náhodné veličiny X:

$$m[X^k] = \sum_{i=1}^{s} x_i^k p_i^*$$

$$M[X^k] = \sum_{i=1}^{s} x_i^k p_i = \overline{X^k}$$ střední hodnota k-tého řádu

<u>Spojité náhodné vel.:</u>

$$M[X^k] = \overline{X^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)\, dx$$

Centrální momenty k-tého řádu:

$$\mu_k = M[\mathring{X}_k] = M[(X-\bar{X})^k] = \overline{(X-\bar{X})^k} = \sum_{i=1}^{s} (x_i - \bar{X})^k \cdot p_i$$

resp.

$$\mu_k = M[\mathring{X}_k] = M[(X-\bar{X})^k] = \overline{(X-\bar{X})^k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{X})^k w(x)\, dx$$

$\mathring{X} = X - \bar{X}$ – centrovaná náhodná veličina, odchylka náh. veličiny

Pravděpodobnost výskytu centrované náh. veličiny (diskrétní) odpovídá pravděpodobnosti $P(x_i)$, neboť $\bar{X}$ je nenáhodné číslo.

$\bar{X}^k$!!! $\overline{X^k}$

Vedle náhodné veličiny X a centrované náhodné veličiny $\mathring{X}$ bývá někdy výhodné zavést normovanou náhodnou veličinu, která má <u>nulovou střední hodnotu</u> a <u>jednotkový rozptyl</u>.

$$Z = \frac{\mathring{X}}{\sigma_X} = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$$; σ_X – směrodatná odchylka

$$\sigma_X = \sqrt{\mu_2}$$

Vlastnosti střední hodnoty:

a) $\bar{X} = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i$ $\qquad\qquad$ $\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x)\, dx$

b) $M[k] = \bar{k} = k$ $\qquad$ pro k = konstanta

c) $M[k_1 X + k_2 Y] = k_1 \bar{X} + k_2 \bar{Y}$

d) $M[XY] = \overline{XY} = M[X] \cdot M[Y] = \bar{X} \cdot \bar{Y}$ (pro nezávislé náh. v.)

e) $M[\mathring{X}] = \overline{X - \bar{X}} = \bar{X} - \bar{X} = 0$

Vlastnosti rozptylu:

rozptyl, disperze, variance

$D(x)$, var X

$$\sigma_x^2 = M[(X - \bar{X})^2] = \sum_{i=1}^{s} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2\, w(x)\, dx .$$

střední kvadratická odchylka (směrodatná odchylka) je mírou rozptýlení možných hodnot náhodné veličiny (co rozptyl)

$\sigma = + \sqrt{M[(X - \bar{X})^2]}$ $\qquad$ (stejný fyz. rozměr jako náh. vel.)

a) $D[c] = 0$ $\qquad$ (c je konstanta)

b) $D[cX] = M[(cX - c\bar{X})^2] = c^2 M[(X - \bar{X})^2] = c^2 \sigma_x^2$

c) rozptyl součtu nez. náh. veličin je dán součtem jejich rozptylů

$$D[X+Y] = M\{[(X+Y) - (\overline{X+Y})]^2\} = M[(X+Y)^2 + (\overline{X+Y})^2 - 2(X+Y)(\overline{X+Y})]$$

$$= \overline{X^2} + \overline{Y^2} + 2\bar{X}\bar{Y} - 2(\bar{X} + \bar{Y})^2 + (\bar{X} + \bar{Y})^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 + \overline{Y^2} - \bar{Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

viz: $\sigma^2 = M[(X - \bar{X})^2] = \sum_{i=1}^{s} (x_i - \bar{X})^2 p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 p_i - 2\bar{X} \sum_{i=1}^{s} x_i p_i + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{s} p_i =$

$$= \overline{X^2} - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$\sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

Vlastnosti dalších momentů:

a) centrální moment 3. řádu

vyjadřuje symetrii rozdělení, pomocí něj je definován tzv.
ČINITEL KOSOSTI (ASYMETRIE):

$$S = \frac{M[\mathring{X}^3]}{\sigma_x^3}$$

(je mírou odchylky křivky hustoty pravděpodobnosti od souměrné křivky, symetrická rozdělení mají $S = 0$)

b) centrální moment 4. řádu

vyjadřuje "špičatost" resp. "plochost" rozdělení:

$$E = \frac{M[\mathring{X}^4]}{\sigma_x^4} - 3$$

Pomocí E je definován tzv. činitel špičatosti (EXCES) (ve srovnání s gaussovským rozdělením)

c) nultý moment, normovací podmínka $M[X^0] = \overline{X^0} = 1$

d) obecný moment k-tého řádu konstanty je dán její k-tou mocninou
$M[c^k] = \overline{c^k} = c^k$

e) centrální moment libovolného řádu konstanty je roven 0
t.j. $M[(c-\bar{c})^k] = 0$

f) centrální momenty všech lichých řádů jsou u každého symetrického rozdělení rovny nule.

(D: u spoj. rozd. součin liché $(x-\bar{x})^k$ a sudé funkce $w(x)$)

Totéž platí pro obecné momenty, jestliže střední hodnota příslušné náhodné veličiny je rovna nule.

CHARAKTERISTICKÁ FUNKCE

X je náhodná veličina, $v \in \mathbb{R}$

$$\Theta(v) = M[e^{jvx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx}\, w(x)\, dx \qquad \text{spojité}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} P(x_k)\, e^{jvx_k} \qquad \text{diskrétní}$$

$$\Rightarrow \quad w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v)\, e^{-jvx}\, dv$$

; v případě, že $w(x)$ je sudá funkce, lze použít "kosinovou" transformaci.

Derivace charakteristické funkce podle parametru v:

$$\frac{d^k \Theta(v)}{dv^k} = j^k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{jvx}\, w(x)\, dx \qquad j - \text{imaginární jednotka}$$

pro $v = 0$

$$\frac{d^k \Theta(v=0)}{dv^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, w(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \overline{x^k} = \frac{1}{j^k} \left.\frac{d^k \Theta(v)}{dv^k}\right|_{v=0}$$

Charakteristickou funkci s výhodou využíváme při výpočtu číselných charakteristik různých rozdělení.