# → TEORIE NÁHODNÝCH PROCESŮ   ZÁKLADNÍ POJMY

## pojem vektorového náhodného procesu

- každý experimentální výsledek → množina hodnot odpovídajících složkám v.

Zobecnění pojmů pravděpodobnosti:
(za p.p. spojitých proměnných - pravděpodobnost získání určité přesné hodnoty je přesně $\underline{0}$.)
Uvažujme diskrétní časové momenty (okamžiky) $t_1, t_2, \dots t_n$
a tážeme se jaká je pravděpodobnost nalezení $X(t_k)$ mezi $y_k$ a $y_k + dy_k$
Odpovídající pravděpodobnost budeme označovat:

$$p_n \begin{pmatrix} y_n & \dots & y_1 \\ t_n & \dots & t_1 \end{pmatrix} dy_1 \dots dy_n = P\{y_1 \le x(t_1) \le y_1 + dy_1, \dots, y_n \le x(t_n) \le y_n + dy_n\}$$

Tato hustota pravděpodobnosti představuje $n$-stavovou vzájemnou hustotu pravděpodobnosti (joint probability)   simultánní

Pojem hustoty pravděpodobnosti přechodu (transition prob. dens.)

$$p_n \begin{pmatrix} y_n \dots & y_1 \\ t_n \dots & t_1 \end{pmatrix} = p \left( \begin{matrix} y_n \\ t_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_{n-1} & \dots & y_1 \\ t_{n-1} & \dots & t_1 \end{matrix} \right) p_{n-1} \begin{pmatrix} y_{n-1} & \dots & y_1 \\ t_{n-1} & \dots & t_1 \end{pmatrix}$$

podmíněná pravděpodobnost přechodu za předpokladu, že systém byl v čase $t_1$ v $y_1, \dots t_{n-1}$ v $y_{n-1}$, do stavu $y_n$ v čase $t_n$.
Pro statistický popis náhodného procesu je nutné znát úplnou hierarchii simultánních pravděpodobností pro $n$ bodů $(n = 1, 2, 3 \dots n \to \infty)$

Hierarchie $p_1, p_2, \dots$ odpovídá rostoucí detailní informaci o systému, vytváří základ pro klasifikaci stochastických procesů.

- Nejjednodušší příklad - čistě náhodný proces, hodnoty proměnné v následujících časových momentech jsou nekorelované.

$$p_2 \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ t_2 & t_1 \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} y_2 \\ t_2 \end{pmatrix} p_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

$p_1$ zřejmě obsahuje veškerou informaci pro definování procesu.

oo Následuje, co do složitosti, tzv. Markovovský proces

(t.j. Markovovské procesy = markovovské p.)

Definice pomocí hustot pravděpodobnosti přechodu

(náhodný) Proces považujeme za markovovský, pokud $\forall n \geq 2$

$$p\left(\begin{matrix} y_n \\ t_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_{n-1} & \dots & y_1 \\ t_{n-1} & \dots & t_1 \end{matrix}\right) = p\left(\begin{matrix} y_n \\ t_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_{n-1} \\ t_{n-1} \end{matrix}\right).$$

Jde o proces s "krátkou pamětí" (předchozí "starší" minulost $(t_{n-2}, t_{n-3} \dots)$ nemá žádný vliv na příští statistické vlastnosti.

Lze uvažovat složitější případy, kdy je informace obsažena v znalosti $p_3\begin{pmatrix} y_3 & y_2 & y_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix}$ atd..

V případě ne-markovovských procesů, je lepší zůstat u markovského případu, rozšířením definice stavu systému zavedením dalších proměnných. Takto je původní ne-markovovský process považován za druh projekce většího markovovského procesu.

Pokud je proces markovovský, znalost hustoty pravděpodobnosti jednotlivé události $p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$ a hustoty pravd. přechodu $p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1 \end{matrix}\right)$ jsou postačující pro určení úplné hierarchie simultánních pravděpodobností a tím, ve statistickém smyslu, zcela charakterizují proces.

$$p_2\begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ t_2 & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1 \end{matrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$ ; pro $p_2$ platí potom

$$p_3\begin{pmatrix} y_3 & y_2 & y_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{matrix} y_3 \\ t_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix}\right) p_2\begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ t_2 & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{matrix} y_3 \\ t_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix}\right) p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1 \end{matrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

a pro n-násobnou hustotu pravd.

$$p_n\begin{pmatrix} y_n & \dots & y_1 \\ t_n & \dots & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{matrix} y_n \\ t_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_{n-1} \\ t_{n-1} \end{matrix}\right) p\left(\begin{matrix} y_{n-1} \\ t_{n-1} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_{n-2} \\ t_{n-2} \end{matrix}\right) \dots p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1 \end{matrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

# STACIONARITA

Náhodný proces je stacionární, pokud hustota pravděpodobnosti jednotlivé události je časově nezávislá a simultánní pravděpodobnosti závisí pouze na rozdílu v pozorovacích časech:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} p_1\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = 0 & (*) \\[2ex] p_n\begin{pmatrix} y_n & \dots & y_1 \\ t_n & \dots & t_1 \end{pmatrix} = p_n\begin{pmatrix} y_n & \dots & y_1 \\ t_n+\Delta & \dots & t_1+\Delta \end{pmatrix} & (**) \end{cases}$$

V případě markovských procesů, je druhá podmínka vyjádřena jednodušším výrazem:

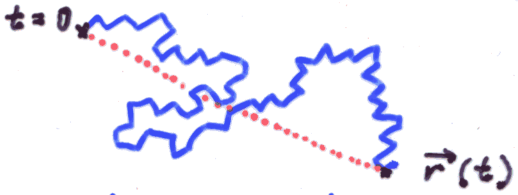
$$p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1 \end{matrix}\right) = p\left(\begin{matrix} y_2 \\ t_2+\Delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1 \\ t_1+\Delta \end{matrix}\right)$$

V případě, že jsou splněny rovnice $(*)$, $(**)$, bez podmínky týkající se $p_1\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$, se proces nazývá homogenní v čase.

Časová homogenita vyjadřuje invariantnost mechanismu, jež je zdrojem fluktuací. Zdůrazněme, že v případě stacionárních stochastických procesů je možno říci, že střední hodnoty v čase a přes soubory jsou shodné.

# BROWNŮV POHYB

Einstein (1905)




2D dráha b. částice

1. Nechť $\Delta x$ je vzdálenost urazená pohybující se částicí za čas $t$. Částice konají difusní pohyb s konstantou $D$.

$$\overline{\Delta x^2} = 2Dt$$

2. Na každou částici působí síla $\vec{F}$; $v_x \sim F_x$; která vyjadřuje tření $F_x = \gamma \cdot v_x$. V tomto značení

$$D = \frac{kT}{\gamma}$$

3. Pokud $\Delta x$ je vzdálenost, kterou urazí za čas $t$ částice rozptýlená v kapalině, potom

$$\overline{\Delta x^2} = 2\,\frac{kT}{\gamma}\cdot t$$

Důkaz: 1D případ

→ 1.) $t = 0$, $x = 0$, $n(x,t) = n_0$

$t > 0$ $\qquad \dfrac{\partial n}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 n}{\partial x^2} \qquad n(x,t) = \dfrac{n_0}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$

$$\overline{\Delta x^2(t)} = \overline{x^2} = \frac{1}{n_0}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 n(x,t)\,dx = 2Dt$$

(pravděpodobnost nalezení n částic v čase $t$ ve vzdálenosti $x$ : $\frac{n}{n_0}$)

## Langevinova rovnice

$$F_x = -w\frac{dx}{dt} + X(t) \quad ; \quad \overline{X(t)} = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -w\frac{dx}{dt} + X(t) \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = u_0,\ x = 0,\ t = 0$$

$$mx\frac{d^2x}{dt^2} = -wx\frac{dx}{dt} + x\cdot X(t)$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt^2}(x^2) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(2\frac{dx}{dt}\cdot x\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot x + m\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt^2}(x^2) + \frac{1}{2}w\frac{d}{dt}(x^2) = m\left|\frac{dx}{dt}\right|^2 + x\cdot X(t)$$

! { Provedeme středování v okamžiku $t$ $\Rightarrow$ $\overline{x\,X(t)} = 0$

Použitím ekvipartičního teorému $\overline{\frac{1}{2}m\left|\frac{dx}{dt}\right|^2} = \frac{1}{2}kT$

Použijeme substituci $z = \frac{d\overline{x^2}}{dt}$,

$$\frac{1}{2}m\frac{dz}{dt} + \frac{1}{2}wz = kT \quad ; \quad \text{partikulární řešení je} \quad z = \frac{2kT}{w}$$

Řešení "bez pravé strany": $z = C\cdot\exp\left(-\frac{wt}{m}\right)$

$$\Rightarrow z = \frac{2kT}{w} + C\,e^{-\frac{wt}{m}}$$

pro $\frac{wt}{m} \gg 1$ druhý člen vymizí

$\frac{m}{w} \approx 10^{-8}\,s$

$$\frac{d\left(\overline{x^2}\right)}{dt} = \frac{2kT}{w} \Rightarrow \overline{x^2} = \frac{2kT}{w}\cdot t$$

## Ornsteinovo řešení L.R.

$$\frac{du}{dt} = -\beta\cdot u + \frac{X(t)}{m} \qquad \beta = \frac{w}{m} \qquad u = \frac{dx}{dt} \ ; \ u = u_0,\ x = 0,\ t = 0$$

lin. dif. rovnice 1. řádu: $y' + a(t)\,y = b(t)$

$t \gg \beta^{-1}$

$$\Rightarrow u = u_0\,e^{-\beta t} + \frac{e^{-\beta t}}{m}\int_0^t e^{\beta\cdot s}X(s)\,ds \quad \ldots\ \rightsquigarrow \ \overline{x^2} = \frac{2kT}{w}\cdot t$$

$$\overline{x^2} = 4(\overline{E}/w)\,t = (P/w^2)\,t = (2m\overline{u^2}/w)\,t$$

## Brownův pohyb.

pohyb částice v kapalině

klasický popis:

$M, \vec{v}, \vec{x}, \vec{F}_E$ (vnější síla), $\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$ (výslednice sil působících na částici okolím mol. kap.)

$$M\dot{\vec{v}} = \vec{F}_E(\vec{x}) + \vec{F}$$

Řešit takový složitý problém je nereálné!

Pokud by byla částice makroskopickým objektem, lze zavést relaci mezi kapalinou a pohybujícím se objektem – třecí síla

$$\vec{F}_{tr} = -\gamma \vec{v}$$

to v případě B.p. nelze. Proč?

Pokud $\vec{F}_E = 0$ —> exponenciálně klesající rychlost!

## Langevin:

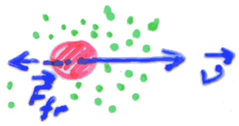
zavedení fluktuující síly k deterministickému členu odpovídajícímu tření:

$$\text{(LR)} \quad \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}}{M} = -\beta\vec{v} + \vec{A}(t)$$

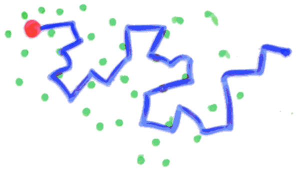
fluktuující veličina $\vec{A}(t)$ má rozměr zrychlení

Náhodná síla reprezentuje výsledek působení nárazů molekul

„tření": moment hybnosti přenesený od molekul kapaliny na částici je v průměru větší ve směru proti pohybu, než ve směru souhlasném s pohybem. => zpomalování makroskopického tělesa v kapalině.




B. částice: se setkává se stejným procesem – srážkami molekul a částice projev je zcela odlišný – částice je natolik malá, že „cítí" změny směru způsobené výslednicí sil a vykonává „trhaný pohyb"



to nazýváme MEZOSKOPICKOU ÚROVNÍ pro popis fyzikálního světa.

MAKROSKOPICKÝ popis je vyhrazen pro objekty, jejichž chování může být popsáno pomocí deterministických rovnic.

## Náhodná, FLUKTUUJÍCÍ FUNKCE:

$\vec{A}(t)$ nepovažujeme za funkci, je definována pouze statisticky. To mění odpovídajícím způsobem význam rovnice (LR) $\rightarrow$ Nalezení pravděpodobnosti rozdělení žádané proměnné - už ne pravidlo pro pohyb ($\rightarrow$ t.j. pohybový zákon)

### STATISTICKÉ VLASTNOSTI:

z experimentu, z úvah o symetrii $\langle \vec{A}(t) \rangle = 0$

Jediný prvek, který by mohl narušit symetrii je relativní pohyb částice vůči kapalině - disipativní člen $-\gamma \vec{v}$

$\Uparrow$

Středování přes soubory, počítané přes populaci brownovských částic, které navzájem neinteragují.

Pozorování ukazují, že směr a intenzita změny pohybu se zdají být nezávislé na charakteristikách předešlé změny.

Označíme-li:

$\phi(t,s) = \langle A(t)\, A(t+s) \rangle$ $\phi(t,s)$ je rozdílná od nuly pouze v malém okolí blízko hodnoty $s = 0$.

Nadále neužíváme vektorové značení, abychom se vyhli komplikacím, omezíme se na 1D případ.

Autokorelační funkce náhodné veličiny $A(t)$ je mírou trvání paměti fluktuující síly.

Jestliže $s$ je dostatečně dlouhé, takže je zaručena nezávislost $A(t+s)$ a $A(t)$,

$\Rightarrow$ t.j.: $\phi(t,s) \rightarrow 0$

Pokud je paměť nekonečně krátká - $\langle A(t)\, A(t+s) \rangle = \sigma^2 \delta(s)$

$\sigma^2 = \langle A^2(t) \rangle$, nemění se s časem!

hypotéza o $\delta$-korelované fluktuující síle může být vyjádřena pojmem "bílý šum". $\rightarrow$ vnáší se "patologický" prvek do matematického popisu.

$\delta$ korelovaná funkce nemůže být znázorněna

prakticky $\phi(s) = \sum_k A_k(t)\; A_k(t+s)$

Pokud by bylo možno znázornit chování $A_k(t)$ na nějakém časovém úseku, pak, pro danou dostatečně malou hodnotu $s$, ve většině případů $A_k(t+s)$ bude mít stejné znaménko jako $A_k(t)$; $\Rightarrow$ téměř všechny příspěvky k sumaci by byly kladné a $\phi(s)$ bude mít nenulovou hodnotu pro malou, avšak nenulovou hodnotu $s$, na rozdíl od limitní hypotézy, kde $\langle A(t)\, A(t+s)\rangle = \sigma^2 \delta(s)$.

Nemožnost výšeuvedeného popisu $A(t)$ odráží analogicky nemožnost popsat $\dot{v}(t)$, které je úměrné $A(t)$. Skutečnost, že $\dot{v}$ není funkce ("patologický" obj.) $\Rightarrow$ $v$ nelze derivovat v žádném bodě!

Uvedený model je idealizací. Pokud bychom dokázali sledovat B. pohyb v časových intervalech mezi srážkami, typicky $10^{-11}$ s, mohli bychom vidět lineární uniformní pohyb. Pokud nás tyto intervaly nezajímají – musíme doufat, že přibližný popis pomocí $\delta$-funkce bude pro naše praktické účely postačující.

Ve skutečnosti – limita pro $t \to 0$ musí být fyzikálně chápána jako úvaha o velmi krátké, ovšem ne infinitezimální časové periodě. Klíčové je, že dynamické chování $v(t)$ resp. rychlosti, musí být mnohem pomalejší, než chování fluktuující síly. Takto je možno vyjádřit (LR) fyzikálně jako vhodné označení pro:

$$\Delta v(t) = -\beta v(t)\cdot \Delta t + \Delta w(t)$$

$$\Delta w(t) = \int_t^{t+\Delta t} A(s)\, ds.$$

Předpoklad o existenci dvou oddělených časových měřítek je implicitně v rovnici, jelikož jsme nahradili

$$-\int_t^{t+\Delta t} v(s)\, ds \qquad \text{členem} \qquad v(t)\Delta t$$

!

t.j.:
rovnici lze vyjádřit:

$$dv(t) = -\beta v(t)\,dt + dw(t)\,; \quad \underbrace{w(t) = \int_0^t A(s)\,ds}_{(WP)}$$

"d" znamená fyzikálně infinitezimální!

Integrál (WP) je znám jako "WIENERŮV PROCES", kterému se někdy říká "BROWNŮV POHYB"

$$\langle w(t)\rangle = \int_0^t \langle A(s)\rangle\,ds = 0$$

$$\langle w(t)w(s)\rangle = \int_0^t dx \int_0^s dy \,\langle A(x)A(y)\rangle = \sigma^2 \min(t,s)$$

t.j. známy jsou první dva momenty → to postačuje pro určení Gaussova rozdělení. Kromě toho "Centrální lim. věta" → $w(t)$ je sumou nekorelovaných srážek ⇒ splňuje efektivně G. rozdělení.

$p(w)\,dw$ – pravděpodobnost nalezení šumové úrovně mezi hodnotami $w$ a $w+dw$:

$$p(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\, e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}}.$$

## SOUVISLOST B.P. S MARKOVOVSKÝMI PROCESY

Co je B. pohyb?

proces $x(t)$
$v(t)$
$[x(t), v(t)]$

V matematické literatuře je s B.p. identifikován Wienerův proces.

$$w(t) = \int_0^t A(s)\,ds \longrightarrow w(t_n) = \int_0^{t_n} A(s)\,ds = w(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} A(s)\,ds$$

⇒ WP je MARKOVOVSKÝ!

$w(t_n)$ nezávisí na historii předcházející $t_{n-1}$; navíc $\Delta w(t)$ podléhá statistickému rozdělení, jež je nezávislé na hodnotách $w(t)$ kromě toho, že je nezávislé na všech předešlých hodnotách.

LR má řešení pro $v(t) = e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta s} A(s)\,ds$

odkud $v(t+\Delta t) = e^{-\beta\Delta t}\, v(t) + e^{-\beta(t+\Delta t)}\int_t^{t+\Delta t} e^{\beta s} A(s)\,ds$

$\Rightarrow$ $v(t)$ je markovovský

ale $\Delta v(t) = v(t+\Delta t) - v(t) = \left(e^{-\beta\Delta t} - 1\right) v(t) + e^{-\beta(t+\Delta t)}\int_t^{t+\Delta t} e^{\beta s} A(s)\,ds$

proces neobsahuje časově nezávislé inkrementy!

$x(t) = \int_0^t v(s)\,ds$ ; $x(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} v(s)\,ds = x(t) + \int_t^{t+\Delta t} v(s)\,ds$

↑ potřebujeme znát $v(s)$ všude!

$x(t)$ samo osobě nereprezentuje markovovský proces

vektorový proces $[x, v]$ je!

$x(t)$ je spojitou projekcí procesu $[x, v]$ do podprostoru proměnné $x$.

## Řešení pomocí CHAPMAN – KOLMOGOROVOVY a FOKKER – PLANCKOVY ROVNICE.

Mark. proc.:

$$p\left(\begin{smallmatrix} y_3 \\ t_3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_1 \\ t_1 \end{smallmatrix}\right) = \int p\left(\begin{smallmatrix} y_3 \\ t_3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_2 \\ t_2 \end{smallmatrix}\right) p\left(\begin{smallmatrix} y_2 \\ t_2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_1 \\ t_1 \end{smallmatrix}\right) dy_2 \qquad \text{(Ch-K)}$$

viz $n=2$: $p_2\begin{pmatrix} y_3 & y_1 \\ t_3 & t_1 \end{pmatrix} = \int p_3\begin{pmatrix} y_3 & y_2 & y_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix} dy_2$ ; kde $p_2\begin{pmatrix} y_3 & y_1 \\ t_3 & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{smallmatrix} y_3 \\ t_3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_1 \\ t_1 \end{smallmatrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$

$$p_3\begin{pmatrix} y_3 & y_2 & y_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix} = p\left(\begin{smallmatrix} y_3 \\ t_3 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_2 \\ t_2 \end{smallmatrix}\right) p\left(\begin{smallmatrix} y_2 \\ t_2 \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_1 \\ t_1 \end{smallmatrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

pro $n=1$: $p_1\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \int p\left(\begin{smallmatrix} y \\ t \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y' \\ t' \end{smallmatrix}\right) p_1\begin{pmatrix} y' \\ t' \end{pmatrix} dy'$

z (Ch-K) rovnice lze odvodit extrémně důležitou diferenciální rovnici pro hustotu pravděpodobnosti přechodu $\longrightarrow$ (F-P)

Uvažujme časově homogenní markovovský proces:

$$p(y, t \mid y_0) = p\left(\begin{smallmatrix} y \\ t \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = p\left(\begin{smallmatrix} y \\ t+s \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} y_0 \\ s \end{smallmatrix}\right)$$

$$p(x, t+\Delta t|x_0) = p\left(\begin{smallmatrix}x\\ t+\Delta t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}x_0\\ t\end{smallmatrix}\right)$$
$$\left(\begin{smallmatrix}x\\ \Delta t+t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}x_0\\ t\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x\\ \Delta t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}x_0\\ 0\end{smallmatrix}\right)$$

(Ch-K) $\longrightarrow$

$$p(x, t+\Delta t|x_0) = \int p(x, \Delta t|y)\, p(y, t|x_0)\, dy$$

pravděpodobnost přechodu ze stavu $x_0$ do $x$ je sumou všech možných mezistavů pravděpodobností přechodu $x_0 \to y \to x$

Nechť $g(x)$ je libovolná funkce (diferencovatelná do potřebného řádu, asymptotických vlastností atd...), vynásobíme obě strany rovnice $\frac{g(x)}{\Delta t}$ a integrujeme podle $x$

$$\frac{1}{\Delta t}\int p(x, t+\Delta t/x_0)\, g(x)\, dx = \frac{1}{\Delta t}\iint p(x,\Delta t|y)\, p(y,t|x_0)\, g(x)\, dx\, dy$$

Použitím Taylorova rozvoje $g(x)$ v okolí bodu $x=y$ do 2. řádu (využití asymptotického chování)

$$g(x) = g(y) + g'(y)(x-y) + \frac{1}{2}g''(y)(x-y)^2 + \dots$$

dosadíme do pravé strany rovnice a využitím normalizační podmínky $\int p(x,\Delta t|y)\, dx = 1$ ... dostáváme:

$$\frac{1}{\Delta t}\iint p(x,\Delta t|y)\, p(y,t|x_0)\, g(x)\, dx\, dy = \frac{1}{\Delta t}\int dy\, g(y)\, p(y,t|x_0) +$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int dy\, p(y,t|x_0)\, g'(y)\underbrace{\int dx\,(x-y)\, p(x,\Delta t|y)}_{(*)\; A(y)\Delta t + o(\Delta t)} +$$

$$+\frac{1}{2\Delta t}\int dy\, p(y,t|x_0)\, g''(y)\underbrace{\int dx\,(x-y)^2\, p(x,\Delta t|y)}_{(**)\; B(y)\Delta t + o(\Delta t)} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Dané 2 integrály představují první dva infinitezimální momenty ~~pravděpodobnosti~~ našeho rozdělení pravděpodobnosti přechodu.

Pokud přejdeme k limitě $\Delta t \to 0$, příspěvky vyššího řádu než $\Delta t$ nás nemusí zajímat.

Předpokládejme, že momenty řádů vyšších než 2 jsou zanedbatelně malé vzhledem k $\Delta t$, takže useknutí řady (rozvoje) na členy nejvýše 2. řádu je oprávněné. Toto spolu s (*) a (**) se v tomto okamžiku jeví jako zcela libovolná hypotéza.

Ve skutečnosti, jak později uvidíme, jsou naše předpoklady zcela oprávněné v případě systému, který splňuje (LR).

$\rightsquigarrow$

$$\int dx\, g(x) \frac{p(x,t+\Delta t|x_0) - p(x,t|x_0)}{\Delta t} = \int dy \left[ g'(y) A(y) + \frac{1}{2} g''(y) B(y) \right] p(y,t|x_0)$$

a v limitě pro $\Delta t \to 0$

$$\int dx\, g(x) \frac{\partial}{\partial t} p(x,t|x_0) = \int dx \left[ g'(x) A(x) + \frac{1}{2} g''(x) B(x) \right] p(x,t|x_0)$$

integrací per-partes, za předpokladu, že $g(x)$ v $\infty$ vymizí spolu se svojí první derivací, bude pravá strana rovna:

$$\int dx\, g(x) \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) p(x,t|x_0) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B(x)\, p(x,t|x_0) \right] \right\}$$

viz: $\int dx\, g(x) \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} [A(x) p \ldots\ldots \right.$ $\quad \underbrace{\left[ \frac{1}{2} g'(x) B(x) p(x,t|x_0) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\downarrow 0} - \underbrace{\int \frac{1}{2} g'(x) \frac{\partial}{\partial x} [B(x) p \ldots]}_{\text{ještě jednou}}$

Protože $g(x)$ je libovolná fce: $\quad -\underbrace{\left[ \quad \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\downarrow 0} + \frac{1}{2} g(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x) p(x,t|x_0)]$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} p(x,t|x_0) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ A(x) p(x,t|x_0) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B(x)\, p(x,t|x_0) \right]} \quad \text{(F-P)}$$

FOKKER – PLANCK-ova rovnice!

hraniční podmínky:

$\lim_{|x| \to \infty} p(x,t|x_0) = 0$ nalezení systému v nekonečnu pro každou konečnou hodnotu času $t$.

Protože se jedná o hustotu pravděpodobnosti přechodu, limitě $t \to 0$ bychom měli dostat počáteční hodnotu $x_0$ s pravděpodobností 1.

t.j. $\lim_{t \to 0} p(x,t|x_0) = \delta(x - x_0)$

Další podmínkou je, že pro fyzikálně významné řešení (F-P) rovnice v limitě $t \to \infty$, se musí hustota pravděpodobnosti blížit k rovnovážnému rozdělení pravděpodobnosti – zcela zapomínající počáteční podmínky. Z tohoto požadavku lze odvodit fluktuačně-disipační teorémy.

Případ rovnice pro pravděpodobnost jediné události:

$p(x,t)$ $$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\, p(x,t)\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B(x)\, p(x,t)\right]$$

Vektorový proces $z(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(z,t\,|\,z_0) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial z_i}\left\{A_i(z)\, p(z,t\,|\,z_0)\right\} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left\{B_{ij}(z)\, p(z,t\,|\,z_0)\right\}$$

kde: $$A_i(z) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (z_i' - z_i)\, p(z',\Delta t\,|\,z_0)\, dz_1' \dots dz_N'$$

$$B_{ij}(z) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int (z_i' - z_i)(z_j' - z_j)\, p(z',\Delta t\,|\,z_0)\, dz_1' \dots dz_N' .$$

Ověření hypotézy o vymizení členů vyšších řádů v případě řešení (LR): t.j. předpoklady jsou v souladu s Langevinovým přístupem ⇒ získání správných výrazů pro infinitezimální momenty přechodu různých stochastických procesů svázaných s Brownovým pohybem.

LR: $\Delta x(t) = v(t)\cdot \Delta t$

(2) $\Delta v(t) = \left[-\beta v(t) + \tilde{F}_E(x)\right]\Delta t + \Delta W(t)$; kde $\tilde{F}_E(x) = F_E(x)/m$

uvažujme B.P. za přítomnosti vnějšího silového pole, protože nijak nekomplikuje naše zacházení s rovnicemi a výsledek bude obecnější.

Stochastický proces $v(t)$. Z definice plyne

$$A(v) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle \Delta v\rangle}{\Delta t}$$

$$B(v) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle \Delta v^2\rangle}{\Delta t}$$

z (2): $A(v) = -\beta v + \tilde{F}_E(x)$

$$B(v) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle \Delta W^2(t)\rangle}{\Delta t}$$

$\sigma^2\delta(g-s)$

t.j. $\langle \Delta W^2(t)\rangle = \int_t^{t+\Delta t} ds \int_t^{t+\Delta t} dg \,\langle A(s)A(g)\rangle = \sigma^2\cdot\Delta t$ $\qquad B(v) = \sigma^2$

## Řešení rovnic pro volný Brownův pohyb ; $\tilde{F}_E = 0$

① $dx(t) = v(t)\,dt$

② $dv(t) = -\beta v(t)\,dt + dW(t)$ ; pro prostor rychlostí je rovnice pro hustotu pravd. přechodu: $\frac{\partial}{\partial t} p(v,t|v_0) + \frac{\partial}{\partial v}(-\beta v p) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} p$

ve fáz. prostoru: $\frac{\partial}{\partial t} p(x,v,t|x_0 v_0) + \frac{\partial}{\partial x}(vp) + \frac{\partial}{\partial v}(-\beta v p) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} p$.

v přetlumeném případě, kdy $dx(t) = d\tilde{W}(t)$ B.P. → W.P.

dostáváme tzv. Smoluchowski (ého) rovnici (v konfiguračním prostoru)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t|x_0) = \frac{\tilde{\sigma}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} p$$

Řešení v rychlostním prostoru: $p=0$ $p = \delta(x-x_0)$

kromě již uvedených hraničních podmínek $x \to \infty$ , $t \to 0$

$p(v,t|v_0)$ spějí k rovnovážnému Maxwellovu rozdělení pro $t \to \infty$

nezávisle na $v_0$ :

$$\lim_{t\to+\infty} p(v,t|v_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

tj. řešení, které splňuje výše uvedené požadavky je:

③ $$p(v,t|v_0) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi D(1-e^{-2\beta t})}}\; e^{-\frac{\beta(v-v_0 e^{-\beta t})^2}{2D(1-e^{-2\beta t})}} \quad \text{, kde}$$

difusní koeficient $D = \frac{\sigma^2}{2}$

Proces $v(t)$ definovaný v ② LR se nazývá Ornstein-Uhlenbeckovým procesem. Hustota pravděpodobnosti ③ má Gaussův tvar

$$\langle v(t)\rangle = v_0\, e^{-\beta t}$$

$$\langle v(t) - \langle v(t)\rangle\rangle^2 = \frac{D}{\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

=> Fyzikálně to znamená, že částice s počáteční rychlostí $v_0$ exponenciálně snižují rychlost k nule, zatímco variance rychlosti exponenciálně roste a asymptoticky se blíží hodnotě $\frac{D}{\beta}$.

F-P rovnice

$$\frac{\partial}{\partial t} p(v,t|v_0) + \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\tilde{F}_E(x) - \beta v\right) p(v,t|v_0)\right] = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} p(v,t|v_0)$$

"2D" proces $[x(t), v(t)]$ (viz vektorový proces $\to A_i, B_{ij}$)

$$A_1 = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta x\rangle}{\Delta t} = v \qquad B_{11} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta x^2\rangle}{\Delta t} = 0$$

$$A_2 = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta v\rangle}{\Delta t} = \tilde{F}_E(x) - \beta v \qquad B_{12} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta x \Delta v\rangle}{\Delta t} = 0$$

$$B_{21} = B_{12} = 0$$

$$B_{22} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\langle \Delta v^2\rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \Delta W^2\rangle}{\Delta t} = \sigma^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x,v,t|x_0,v_0) + \frac{\partial}{\partial x}\left[v\, p(x,v,t|x_0 v_0)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\left(\tilde{F}_E(x) - \beta v\right) p(x,v,t|x_0 v_0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[\sigma^2 p(x,v,t|x_0 v_0)\right].$$

Rovnice za pp. že kapalina je velmi viskózní, disipativní efekty jsou relevantní: $\beta$ je velmi velké, $v$ je silně tlumený "parametr" (proměnná)

pp. že jakkoliv její změna se děje na mnohem kratším časovém intervalu než změna $x$. $\Rightarrow$ $\dot{v} \approx 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\beta v + \tilde{F}_E(x) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ v &= \tilde{F}_E(x)/\beta \end{aligned}$$

"rychlá" proměnná $v$, která rychle relaxuje, okamžitě sleduje, v první aproximaci, pomalou proměnnou $x$.

"slave parametr" $v$ (zotročená proměnná)

"order parametr" $x$ – určuje chování systému

$$\dot{x} = \tilde{F}_E(x)/\beta$$

LR pro přetlumený případ: $\Delta x(t) = \frac{\tilde{F}_E(x)}{\beta}\Delta t + \Delta \tilde{W}(t)$.

F-P $$\frac{\partial}{\partial t} p(x,t|x_0) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\tilde{F}_E(x)}{\beta} p(x,t|x_0)\right\} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x,t|x_0),$$

kde $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\langle \Delta \tilde{W}^2\rangle}{\Delta t}$.

Rozdělení je ovlivněno náhodnými srážkami mezi částicemi a molekulami kapaliny. Asymptotická hodnota variance rychlosti je dána poměrem mezi intenzitou fluktuující síly $D = \frac{\sigma^2}{2}$ a mírou disipativních efektů $\beta$.

Úzký vztah mezi fluktuujícími silami a disipativními jevy potvrzují následující úvahy:

Zavedením podmínky, že O-U proces (resp. rozdělení) asymptoticky dosáhne Maxwellova rovnov. rozdělení dostáváme:

$$D = \frac{\beta k T}{m}$$

Fluktuačně-disipativní teorém.
ve ~~fáz. prostoru~~ rychl. prostoru

Fluktuace – disipace jsou dva rozdílné aspekty stejného jevu – náhodné interakce mezi brownovskými částicemi a molekulami tekutiny.

Existence dvou zřetelně oddělených časových měřítek, jedno určující rychlost změny náhodných sil, druhé dynamiku částice → umožňuje použít vhodné schema, ve kterém je oddělen obvyklý člen vyjadřující tření $(-\beta v)$ od "bílé" síly $A(t)$.

rovnice (3) $\quad p \to \delta(v - v_0)$ pro $t \to 0$

Řešením rovnice pro přetlumený případ v konfiguračním prostoru dostáváme známou difusní rovnici:

(4) $$p(x,t \mid x_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \tilde{D} t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tilde{D} t}} \; ; \quad \text{kde } \tilde{D} = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$$