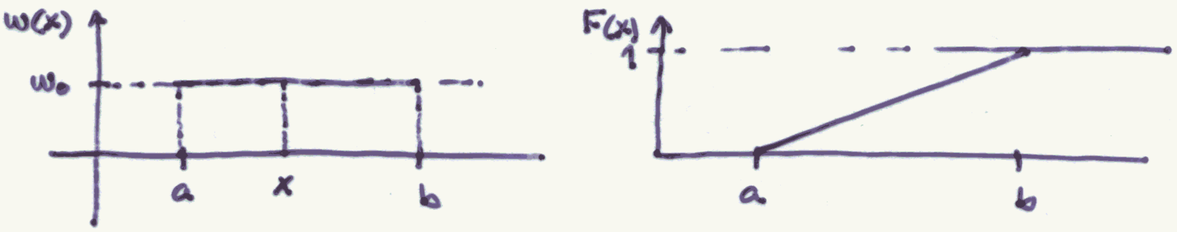
PŘÍKLADY ROZDĚLENÍ NÁHODNÝCH VELIČIN:

SPOJITÉ:

A) Rovnoměrné



$w(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $a \le x \le b$

$$\bar{x} = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{a+b}{2} \;;$$

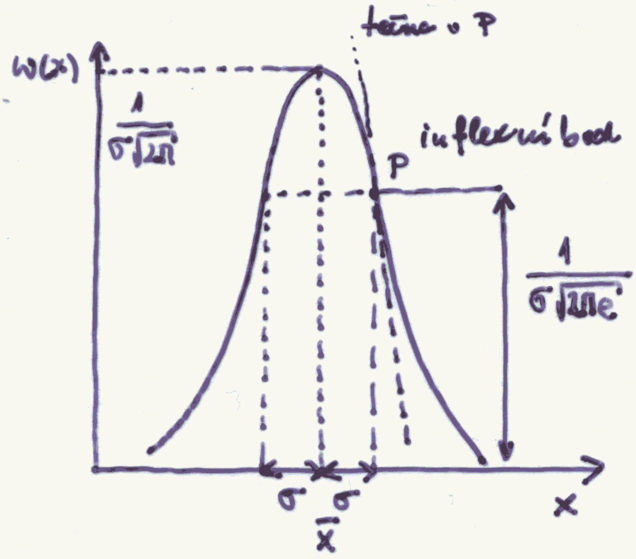
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 w(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

B) NORMÁLNÍ (GAUSSOVO)

určeno dvěma parametry $\bar{x}, \sigma,$

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma}}$$

symetrické $S = 0$, $E = 0$



$\bar{x} \pm 2\sigma$ 0.9545 p.p. výskytu

$\bar{x} \pm 3\sigma$ 0.9973 3σ

0.23% mimo

$$M_r = (r-1)\,\sigma^2 M_{r-2}$$

momenty lichého řádu jsou 0!

$E = \sigma\sqrt{2\pi}$ ... střední odchylka (pravděpodobná)

$E_1 = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ... střední aritmetické odchylka ; $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ ... míra přesnosti

Po substituci $z = \frac{x - \bar{X}}{\sigma}$

$$P(X<x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz = \Phi(z) = \Phi\left[\frac{x-\bar{X}}{\sigma}\right]$$

Hodnoty funkce $\Phi(z)$ jsou tabelovány.

normované NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

$\Phi(z)$ ... NORMOVANÁ NORMÁLNÍ DISTRIBUČNÍ FUNKCE.

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad ; \quad \Phi(0) = 0.5$$

Logaritmicko normální rozdělení:

dvě náhodné veličiny X a Y vázány funkčním vztahem

$X = \frac{1}{c} \ln Y$, c je libovolná konstanta.

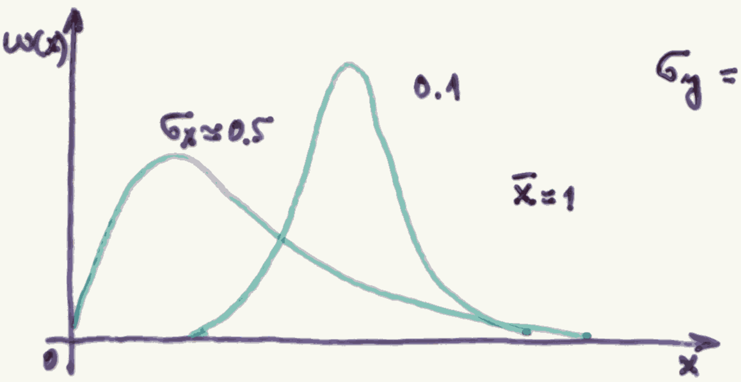
Bude-li rozdělení veličiny X normální, pak náhodná veličina Y bude mít tzv. logaritmicko-normální rozdělení.

$$w(y) = \frac{1}{c y \sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln y - c\bar{X})^2}{2 c^2 \sigma_x^2}\right] \quad \text{pro } y > 0.$$

substituce $z = \frac{\ln y - c\bar{X}}{c\sigma_x}$ $\longrightarrow$ $\overline{y^k} = \exp\left[c \cdot k \cdot \bar{X} + \frac{1}{2} c^2 k^2 \sigma_x^2\right]$

$$\bar{Y} = \exp\left[c\bar{X} + \frac{1}{2} c^2 \sigma_x^2\right]$$

$$\sigma_y = \bar{Y}^2 \left[e^{c^2 \sigma_x^2} - 1\right]$$



σ_x malé (≤ 0.1) prakticky jako normální.

Rozdělení gama:

$$w(x) = \lambda^{m+1} x^m e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

reálná čísla $m > -1$; $\lambda > 0$ jsou parametry rozdělení.

X nabývá hodnot $x \geq 0$

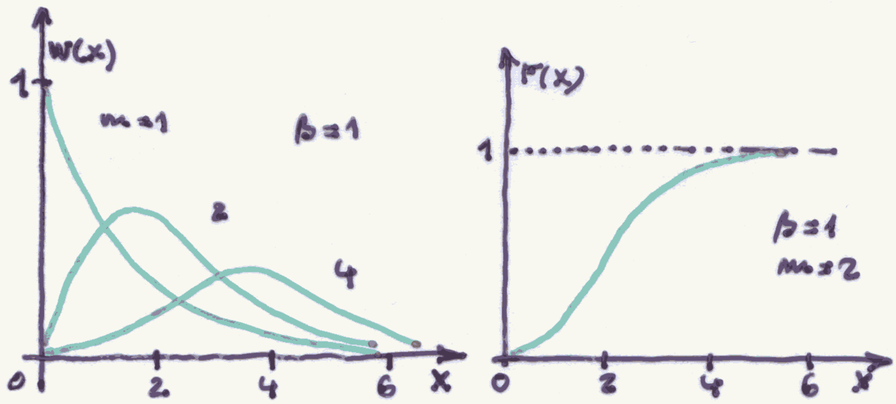
$$\Gamma(m+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^m \, dt.$$

$$\bar{x} = \frac{m+1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{m+1}{\lambda^2} = \frac{\bar{x}^2}{m+1}$$

maximum hustoty pravděpodobnosti: $x = \frac{m}{\lambda}$.

(Rozdělení χ^2, exponenciální a Erlangovo jsou zvláštní případy gama rozdělení)



Exponenciální:

$w(x) = a \cdot e^{-ax}$ pro $x \geq 0$

$(m = 0)$

$\bar{x} = \frac{1}{a}$; $\sigma^2 = \frac{1}{a^2} = \bar{x}^2$

$F(x) = 1 - e^{-ax}$

Erlangovo:

$w(x) = \lambda^{m+1} x^m e^{-\lambda x} \frac{1}{m!}$ pro $x \geq 0$; parametry m, celé, ≥ 0; $\lambda > 0$

$\Gamma(m+1) = m!$

(teorie spolehlivosti, teorie hromadné obsluhy)

Rozdělení χ^2

uvažme Y s normálním rozdělením, $\bar{Y}=0$, $\sigma=1$

$$w(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \qquad \left[\Gamma \text{ rozd. pro } \lambda=\frac{1}{2},\ n+1=\frac{n}{2}\right]$$

dále $X=Y^2$

rozdělení takto definované náhodné veličiny se nazývá χ^2, rozdělení s jedním stupněm volnosti má tvar: ($n=1$)

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \quad \text{pro } x\geq 0$$

pro n stupňů volnosti:

$$w(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

, kde n je kladné, celé číslo

$\bar{x}=n$

$\sigma^2=2n$, pro $n=1,2$ $w(x)$ monotónně klesá

pro $n\geq 2$ vykazuje maximum pro $x=n-2$

$n\to$ rozložení se blíží křivce normálního rozdělení ($\bar{x}=n$, $\sigma^2=2n$)

Rozdělení χ^2 se často využívá ve statistice.

Rayleighovo rozdělení:

$$w(x)=\frac{x}{\alpha^2}\exp\left[-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right] \quad \text{pro } x>0$$

$$F(x)=1-\exp\left[-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right] \qquad \bar{x}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\alpha$$

$$\sigma^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\alpha^2=2\alpha^2-\bar{x}^2$$

ROZDĚLENÍ DISKRÉTNÍCH NÁHODNÝCH VELIČIN

Náhodný děj:

V každém jednotlivém výsledku se může vyskytnout náhodné jev A.
P(A) je stejná při každém pozorování. Jaká je pravděpodobnost, že v počtu $\underline{n}$ pozorovaných nezávislých výsledcích děje se jev A vyskytne právě $\underline{k}$-krát

$P_n(k) = ?$

1) $k=0$; v n pozorováních se jev A nevyskytne $\Rightarrow$ $k=0$, n-krát se vyskytne jev $\bar{A}$ $\Rightarrow$

$$P_n(0) = P[\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}] = [P(\bar{A})]^n = [1-P(A)]^n$$

2.) $k=1$; v n pozorováních se jev A vyskytne právě jeden krát.
jev $\bar{A}$ se vyskytne $n-1$ krát.

Jev A se může vyskytnout na různém místě (celkem n-možností)

1. místo: $P'_n(1) = P(A\cdot\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}) = P(A)\cdot[P(\bar{A})]^{n-1} = P(A)\cdot[1-P(A)]^{n-1}$

stejný výsledek obdržíme pro i-tou pozici

$$\Rightarrow P_n(1) = n\cdot P'_n(1) = n\cdot P(A)\cdot[1-P(A)]^{n-1}$$

3. $k=2$; $P''_n(2) = P(AA\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}) = [P(A)]^2\cdot[P(\bar{A})]^{n-2} = [P(A)]^2[1-P(A)]^{n-2}$

jevy mohou být na různých místech: kombinace mezi dvěma prvky A a $(n-2)$ prvky $\bar{A}$ ... $\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$$P_n(2) = \frac{n!}{2!(n-2)!}[P(A)]^2\cdot[1-P(A)]^{n-2}$$

$$P_n(k) = \binom{n}{k}\cdot[P(A)]^k[1-P(A)]^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

binomické
Bernoulliho rozdělení pravděpodobnosti.

analogie s obecným členem binomické věty:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Platí: $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$

$$P_n(k \le m) = \sum_{k=0}^{m} P_n(k) \; ; \; \text{pro } m \le n$$

vyjadřuje pravděpodobnost, že jev A se v pozorování vyskytne nejvýše m-krát.

resp. $P(X=k) = \binom{n}{k}[P(A)]^k[1-P(A)]^{n-k}$

$\bar{X} = n \cdot P(A)$ $\qquad \bar{X} = \bar{k}$

$\sigma^2 = \bar{X}[1-P(A)]$

z definice: $\bar{X} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}[P(A)]^k[1-P(A)]^{n-k}$; ...

Pomocí charakteristické funkce: $\qquad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$$\Theta(v) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k) e^{jvk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{jvk}$$

Využijeme-li: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, $\qquad \Theta(v) = (p \cdot e^{jv} + q)^n$

$\Theta'(v=0) = j \cdot n \cdot p$

$\Theta''(v=0) = (-np^2 + n^2p^2 + np)\, j^2$

$= np^2 - n^2p^2 - np$

$\bar{X} = \frac{1}{j}\Theta'(v=0) = n \cdot p$

$\overline{X^2} = \frac{1}{j^2}\Theta''(v=0) = np + n^2p^2 - np^2 \;\Rightarrow\; \sigma^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2 = np - np^2 = n \cdot p(1-p)$

$= n \cdot p \cdot q$

Poznámka:

Stirlingova formule $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

pro $n \to \infty$ binomické rozdělení se blíží normálnímu

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[k - n\cdot P(A)]^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad \sigma^2 = n\cdot P(A)\cdot[1-P(A)]$$

asymptotický vztah lze použít, když $\sigma^2 > 10$ a $\frac{1}{n+1} < P(A) < \frac{n}{n+1}$

pro $n > 30$ a $p \leq 0.1$ se binomické rozdělení blíží Poissonovu:

$$P_n(k) \approx \frac{[n\cdot P(A)]^k}{k!} \exp[\underbrace{-n\cdot P(A)}_{-\bar{k}}]$$

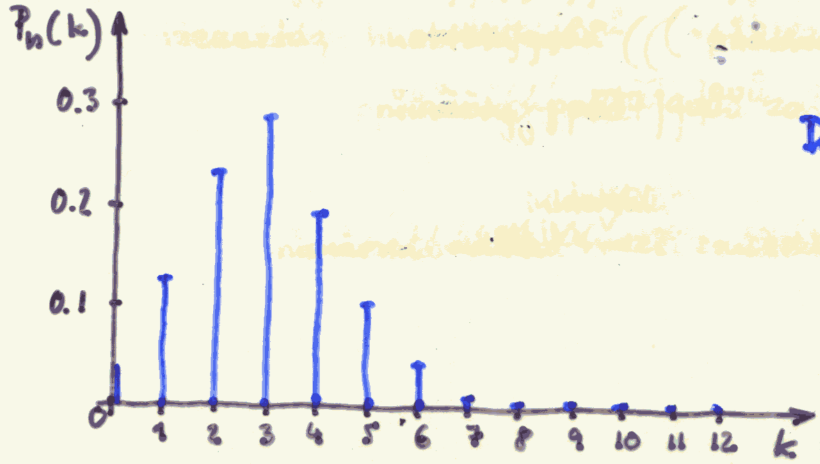
Příklad:

Aktivita telef. kanálů je 25%, jejich obsazení je nezávislé. Jaké je rozdělení pravděpodobnosti počtu současně obsazených kanálů? Nejpravděpodobnější počet současně obsazených kanálů a pravděpodobnost obsazení nejvýše 7 kanálů z 12-ti kanálového systému?

$p = 0.25$, 2 jevy: aktivní A, pasivní $\bar{A}$ $\qquad n = 12$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P_n(k \leq 7) = \sum_{k=0}^{7} P_n(k) = 0.996$$

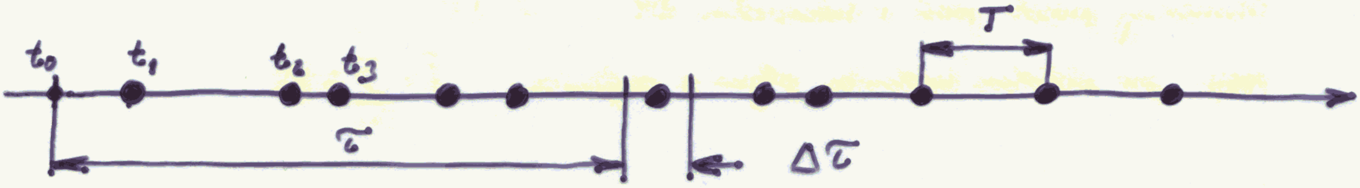


Důsl.:

dimenzování zesilovače na 7x výkon kanálu.

POISSONOVO ROZDĚLENÍ

tok náhodných jevů:



vlastnosti:

a) výskyt jevů A je stacionární (v kterémkoliv intervalu stejné délky τ, bez ohledu na volbu počátku času, je vždy stejná pravděpodobnost výskytu daného počtu jevů). Počet výskytů jevu A v intervalu τ závisí pouze na velikosti τ.

b) Výskyt jednotlivých jevů je vzájemně nezávislý. (Počet výskytů jevu A v jednom intervalu τ neovlivňuje počet výskytů jevu A v jiném intervalu)

c) Pravděpodobnost výskytu více než jednoho jevu A v dostatečně malém intervalu $\Delta\tau$ je zanedbatelně malá ve srovnání s pravděpodobností výskytu jednoho jevu v témže intervalu. $P(k,\tau)$

$P(k, \Delta\tau) \doteq 0$ pro $k > 1$

ν průměrný počet výskytů jevu za jednotku doby
intenzita, hustota jevů („frekvence")

$\lambda = \nu \cdot \tau$ průměrný počet jevů za dobu τ

$\overline{T} = \frac{1}{\nu}$ průměrná délka intervalu mezi sousedními jevy.

① Určíme pravděpodobnost výskytu jednoho jevu v intervalu $\Delta\tau$ $P(1, \Delta\tau) = ?$
a pravděpodobnost, že se jev v tomto intervalu nevyskytne. $P(0, \Delta\tau) = ?$

Průměrný počet jevů v intervalu $\Delta\tau$: $\nu \cdot \Delta\tau$
resp. pro střední hodnotu plyne z definice : $\bar{X} = \sum_{i=1}^{s} x_i p_i$

$$\bar{k}(\Delta\tau) = \nu \cdot \Delta\tau = \sum x_i P(x_i) = 0 \cdot P(0, \Delta\tau) + 1 \cdot P(1, \Delta\tau) + 2 \cdot P(2, \Delta\tau) + \ldots$$

protože $P(k, \Delta\tau) \doteq 0$ pro $k > 1$

$$P(1, \Delta\tau) \doteq \nu \cdot \Delta\tau$$

podle vlastnosti c) se v intervalu $\Delta\tau$ vyskytne : buď žádný
nebo jeden jev.

$$\Rightarrow P(0, \Delta\tau) \doteq 1 - P(1, \Delta\tau) = 1 - \nu\Delta\tau$$

② Určíme pravděpodobnost výskytu k jevů v intervalu τ ; $P(k, \tau)$
- pravděpodobnost k jevů v intervalu $(\tau + \Delta\tau)$
  pro $k = 0$ $P(0, \tau + \Delta\tau)$: v intervalu τ se nevyskytne A
  v intervalu $\Delta\tau$ se nevyskytne A

$$P(0, \tau + \Delta\tau) = P(0, \tau) \cdot P(0, \Delta\tau) = P(0, \tau)(1 - \nu\Delta\tau) \qquad (\Lambda)$$

(nezávislost jevů)

$P(k, \tau + \Delta\tau)$
v $\Delta\tau$ nejvýše 1 jev A ; k jevů v intervalu $\tau + \Delta\tau$ se může vyskytovat následujícím způsobem :

1 v τ k jevů a v $\Delta\tau$ žádný
2 v τ $k-1$ a v $\Delta\tau$ jeden jev. (další možnost není!)

$$P(k, \tau + \Delta\tau) = P(k, \tau) P(0, \Delta\tau) + P(k-1, \tau) P(1, \Delta\tau) =$$
$$= \underline{P(k, \tau)(1 - \nu \cdot \Delta\tau) + P(k-1, \tau) \nu \cdot \Delta\tau.} \qquad (M)$$

Úpravou (1) a (11):

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left[P(0,\tau+\Delta\tau) - P(0,\tau)\right] = -\nu P(0,\tau)$$

$$\frac{1}{\Delta\tau}\left[P(k,\tau+\Delta\tau) - P(k,\tau)\right] = -\nu P(k,\tau) + \nu P(k-1,\tau) \;;\; k \geq 1$$

v limitě pro $\Delta\tau \to 0$ $\quad \frac{dP(k,\tau)}{d\tau} = P'(k,\tau)$:

t.j.

$$P'(0,\tau) = -\nu P(0,\tau)$$

$$P'(k,\tau) = -\nu P(k,\tau) + \nu P(k-1,\tau)$$

Dostáváme lineární diferenciální rovnice 1. řádu s proměnnou τ.
Vzhledem k proměnné k jsou to diferenční rovnice 1. řádu.
Mají obecný tvar: $\quad y' + \alpha y + \beta = 0$
řešíme substitucí $\quad y = u(\tau) \cdot v(\tau)$ $\quad$ a postupným řešením dostaneme:

$$P(0,\tau) = e^{-\nu\tau}$$

$$P(1,\tau) = \nu\tau\, e^{-\nu\tau}$$

$$P(2,\tau) = \frac{1}{2}\nu^2\tau^2\, e^{-\nu\tau}$$

$$P(3,\tau) = \frac{1}{2\cdot 3}\nu^3\tau^3\, e^{-\nu\tau}$$

$\vdots$

$$P(k,\tau) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!} e^{-\nu\tau} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \text{pro } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Pravděpodobnost výskytu k jevů v intervalu τ.

POISSONOVO ROZDĚLENÍ

$$\bar{k} = \sigma_k^2 = \nu\cdot\tau = \lambda$$

POISSONOVO ROZDĚLENÍ:

Pravděpodobnost, že v intervalu τ se jev A vyskytne alespoň jedenkrát

$$P(k \geq 1, \tau) = 1 - P(0, \tau) = 1 - e^{-\nu\tau}$$

Rozdělení délky intervalů T mezi sousedními jevy:

$$P(T > t) = P(0, t) = e^{-\nu t}$$

Pravděpodobnost $P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\nu t}$ pro $t > 0$

Tato pravděpodobnost je distribuční funkcí veličiny T

$\Downarrow$

$$w(t) = \frac{d\,P(T < t)}{dt} = \nu e^{-\nu t} \quad \text{pro } t > 0.$$

STATISTICKÉ KRITÉRIUM SOUHLASU

Věta (Pierson):

ξ je libovolná náhodná veličina (jedno či vícerozměrná), diskrétní nebo spojitá.

X - množina všech hodnot ξ

Označme libovolné rozdělení množiny X na r navzájem disjunktních množin $X_1, X_2, \dots, X_r$ takových, že $P\{\xi \in X_j\} = p_j > 0$ pro $j = 1, 2, \dots, r$.

Zřejmě $p_1 + \dots + p_r = P\{\xi \in X\} = 1$.

Vyberme N nezávislých hodnot $\xi_1, \dots, \xi_N$ náhodné veličiny ξ a označme pomocí ν_j množství (počet) hodnot patřících do X_j.

Klasická pravděpodobnost $M(\nu_j) = Np_j$ *)

*) Náhodná veličina ν_j splňuje binomický zákon s $M\nu_j = Np_j$ a $D\nu_j = N \cdot p_j \cdot (1 - p_j)$. Množina hodnot $(\nu_1, \dots, \nu_r)$ podléhá multinomickému rozdělení pro $k_1 + k_2 + \dots + k_r = N$

$$P\{\nu_1 = k_1, \dots, \nu_r = k_r\} = \frac{N!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}.$$

Jako míru odchylky jistých hodnot ν_j od teoretických Np_j zvolme veličinu:

$$\chi_N^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - Np_j)^2}{Np_j}.$$

Pro libovolnou veličinu ξ a rozdělení $X = X_1 + \dots + X_r$ takové, že všechna $p_j > 0$ pro každé $x > 0$

$$\lim_{N \to \infty} P\{\chi_N^2 < x\} = \int_0^x k_{r-1}(x)\, dx,$$

kde hustota pravděpodobnosti $k_m(x)$ rozdělení χ^2 se stupněm volnosti m je dána vztahem:

$$k_m(x) = \left[2^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

Testování hypotéz:

$$\int_{\chi^2(r-1,\, 1-\beta)}^{\infty} k_{r-1}(x)\, dx = 1-\beta$$

r - dělení množiny hodnot;

β - spolehlivost pravděpodobnosti

$\beta = 0.95$ <u>TÉMĚŘ</u> VÝZNAMNÁ SHODA

$\beta = 0.99$ <u>VÝZNAMNÁ</u>

$\beta = 0.999$ <u>VYSOCE</u> VÝZNAMNÁ

P - testované rozdělení pravděpodobnosti