

Úvod do praktické fyziky: Opravné úlohy

Cvičící: Jan Matoušek

Úvod

Chybějící body k zápočtu mohou studenti dohnat odevzdáním domácích úkolů, které jsou hodnoceny jedním až dvěma body. Možnosti jsou dvě:

- Jednak lze odevzdat řešení jakéhokoliv dříve zadaného úkolu z programování. Řešení by mělo obsahovat nejen program, ale i krátký komentář k jeho výsledkům. Samozřejmě také nesmí být úplně totožné se vzorovým řešením zveřejněným na webu ani s žádným jiným dříve odevzdaným programem.
- Jednak lze odevzdat řešení úloh zadaných v tomto dokumentu (celkem 15 bodů).

Všechna řešení prosím odevzdávejte jako soubory pojmenované ve tvaru `jmeno_prijmeni` na adrese <https://cernbox.cern.ch/index.php/s/dsXyMEJShf03Cgp>

Úlohy

1 Systematická a statistická chyba (1.5 bodu)

Voltmetr má třídu přesnosti 1.5 a rozsahy 10, 50, 250 a 1000 V. Naměřili jsme hodnoty napětí 47, 44, 47, 45, 47 a 45 V. Odhadněte střední hodnotu napětí a její statistickou a systematickou neurčitost. Nakonec určete její neurčitost celkovou.

2 Odhad parametrů exponenciálního rozdělení (1.5 bodu)

Doba života radioaktivního izotopu má exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(t) = \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau})$. Parametr τ se nazývá střední doba života, protože platí $E[t] = \tau$. Variance je $V[t] = \tau^2$.

V experimentu jste naměřili doby života $t = (0.0, 14.5, 10.1, 0.4, 11.7)$ s. Odhadněte τ jako aritmetický průměr t_i . Určete standardní odchylku doby života σ_t a z ní přenosem chyb neurčitost (standardní odchylku) spočtené střední doby života σ_τ . Určete také poločas rozpadu a dobu, za kterou se rozpadne 90 % atomů izotopu. Spočítejte jejich neurčitosti.

3 Odhad parametrů normálního rozdělení (2 body)

Pro svůj experiment potřebujete 100 vzorků – kuliček nějakého drahého materiálu o hmotnosti v rozmezí 0.99–1.01 g. Pořídili jste si od jistého výrobce 10 na zkoušku a zjistili jste, že mají hmotnosti $m = (0.998, 1.029, 0.997, 1.031, 1.001, 0.995, 1.024, 1.002, 1.024, 1.019)$ g. Předpokládejte, že hmotnosti mají normální rozdělení. Jaká je pravděpodobnost, že jedna další dodaná kulička má hmotnost v potřebném rozmezí? Kolik je potřeba objednat, aby jich byl dostatek na provedení experimentu?

4 Vlastnosti exponenciálního rozdělení (1 bod)

Odvoďte střední (očekávanou) hodnotu a varianci proměnné x , která má exponenciální rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$. Spočítejte distribuční funkci $F(x)$ a určete pravděpodobnost, že x se nachází v intervalu jedné standardní odchylky kolem střední hodnoty.

5 Vlastnosti rozdělení spojitě náhodné proměnné (1 bod)

Odvodte střední (očekávanou) hodnotu a varianci úhlu $\phi \in (-\pi, \pi)$, který má rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(\phi) = \frac{1}{2\pi}(1 + A \cos \phi)$. Jaká je minimální a maximální možná variance ϕ v závislosti na parametru A ? Určete pravděpodobnost, že ϕ se nachází v intervalu jedné standardní odchylky kolem střední hodnoty pro $A = 1$.

6 Metoda maximální věrohodnosti (3 body)

Svazek částic z urychlovače má kruhově symetrický gaussovský profil. Osa svazku je totožná s osou z . Hustotu pravděpodobnosti výskytu svazkové částice v závislosti na vzdálenosti r od osy z pak můžeme napsat jako

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right).$$

Spočtete distribuční funkci $F(r)$ a ověřte, že hustota pravděpodobnosti je správně normalizovaná. Naměřili jste polohy 10 částic $r = (0.87, 0.63, 0.66, 0.72, 0.33, 1.36, 1.16, 1.40, 0.85, 0.56)$ cm. Metodou maximální věrohodnosti odvodte estimátor $\hat{\sigma}$ šířky rozdělení a spočítejte odhad pro uvedené polohy. Spočítejte, jaký poloměr terče zvolit, pokud chcete, aby v jím procházelo 80% svazku.

7 Přenos chyb (2 body)

Chcete změřit gravitační zrychlení g s pomocí kyvadla, které je téměř ideální (lehký dlouhý závěs, malé a těžké závaží, malá výchylka). Pro periodu kyvadla potom platí $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Ke zjištění délky závěsu jste použili měřidlo se stupnicí po 1 mm a zjistili jste délku $l = 0.502$ m. Určete přenosem chyb jak relativní neurčitost g závisí na neurčitosti délky l a periody T . S jakou přesností je třeba změřit T , aby byl příspěvek její neurčitosti srovnatelný s příspěvkem od l ?

K dispozici máte jen obyčejné stopky a přesnost, kterou s nimi můžete dosáhnout, odhadujete na $\sigma_t = 0.5$ s, což jistě nestačí. Přesnost měření T ale můžete zvýšit měřením doby, za kterou proběhne ne jedna, ale n period. Kolik byste zvolili a jaká by byla výsledná neurčitost g ?

8 Lineární regrese (3 body)

Veličina y závisí na x jako $y(x) = a + bx$. Naměřili jsme hodnoty y_i zatížené chybou σ_i :

x	y	σ
1.00	3.25	0.25
2.00	2.93	0.25
3.00	3.43	0.25
4.00	3.33	0.50
5.00	4.05	0.50
6.00	3.90	0.50

Určete pomocí metody nejmenších čtverců (lineární regrese) odhady parametrů a a b . Určete také odhady jejich neurčitosti, kovariance a korelace. Spočítejte, jakou hodnotu můžeme očekávat pro $x = 10$. Metodou přenosu chyb určete chybu tohoto odhadu.