Úlohy 4 a 5

Úvod do praktické fyziky
Cvičící: Jan Matoušek

Datum odevzdání: 15. 12. 2020

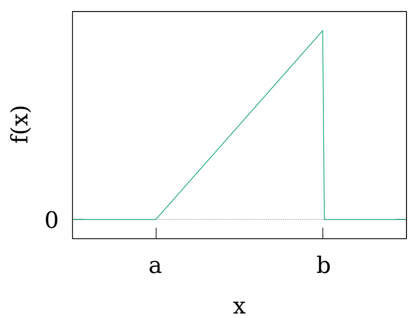
1 Úloha 4: Generování náhodné proměnné

Vygenerujte 1000 hodnot náhodné proměnné x, která bude mít hustotu pravděpodobnosti znázorněnou na obrázku 1. Parametry a, b můžete zvolit libovolně. Můžete využít metodu inverzní funkce (viz cvičení 3 a 8), nebo vyjít ze součtu dvou rovnoměrně rozdělených náhodných proměnných (viz cvičení 7, jen bude potřeba půlku výsledných čísel zahodit, nebo ozrcadlit do intervalu $[a, b]$).

Hodnoty naplňte do histogramu a porovnejte ho s očekávanými počty případů v binech

$$n_i^{\mathrm{exp}} = 1000\delta f(x_i),$$

kde x_i je střed binu a δ je jeho šířka.



Obrázek 1: Hustota pravděpodobnosti.

2 Úloha 5: Rozptyl počtu případů v binu (za 2 body)

Naplníme-li N hodnot náhodné proměnné x s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ do histogramu, počet případů n_i v i-tém binu je také náhodná proměnná. Jakou má střední hodnotu a rozptyl?

Pravděpodobnost, že jedno x padne do i-tého binu se středem x_i a šířkou δ je

$$P_i = \int_{x_i-\frac{\delta}{2}}^{x_i+\frac{\delta}{2}} f(x)\mathrm{d}x \approx f(x_i)\delta.$$

Počet případů v binu je vlastně počet úspěchů (hodnota padla do binu) v N pokusech a má tedy binomické rozdělení. Jeho střední hodnota je $\mu_{n_i} = NP_i$ a rozptyl $\sigma_{n_i}^2 = NP_i(1 - P_i)$.

Pokud je P_i malá (typicky pokud je binů hodně), je dobrou aproximací binomického rozdělení Poissonovo rozdělení s parametrem $\nu = NP_i$. Jeho očekávaná hodnota i rozptyl jsou rovny NP_i.

Úkolem je ověřit simulací, že to tak opravdu je. Nejjednodušší je použít $x \in U(0, 1)$. Ke splnění úkolu stačí udělat **pouze jeden test**. Zde jsou dva návrhy takového testu, můžete ale použít i nějaký jiný:

1. Naplňte histogram 1000-krát a počet událostí n_i v jednom vybraném binu naplňte do dalšího histogramu. Ten pak vykreslete a porovnejte ho s Poissonovým a/nebo binomickým rozdělením. Zvolte např. $N = 100$, počet binů $M = 10$, tedy $P_i = 1/10$.

2. Zvolte např. počet binů $M = 10$. Naplňte histogram 1000-krát $N = 10$ hodnotami a spočítejte standardní odchylku n_i od očekávané hodnoty $\mu_{n_i} = NP_i = \frac{N}{10}$ jako

   $$\sigma_{n_i} = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{j=1}^{1000}\left(n_{i,j} - \frac{N}{10}\right)^2}.$$

   Opakujte pro $N = 20$, $N = 40$ a $N = 100$. Vyneste stardardní odchylky do grafu a porovnejte je s očekáváním z binomického ($\sigma_{n_i} = \sqrt{NP_i(1 - P_i)}$) a Poissova ($\sigma_{n_i} = \sqrt{NP_i}$) rozdělení.