Úvod do praktické fyziky, cvičení 8
Přenos chyb

Jan Matoušek

24. 11. 2020

UNIVERZITA KARLOVA
Matematicko-fyzikální
fakulta

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$
  se středními hodnotami $E[x_i] = \mu_i$ a kovariancemi $\mathrm{cov}(x_i, x_j)$ ($\mathrm{cov}(x_i, x_i) = \sigma_i^2$).
- Výsledná veličina $y = y(\boldsymbol{x})$.
- Jaká je očekávaná hodnota a rozptyl veličiny y?
- Aproximujeme y dvěma členy Taylorova rozvoje okolo bodu $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)$:

$$y(\boldsymbol{x}) \approx y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) \cancel{+ \ldots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y}{\partial x_i^k}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)^k + \ldots}$$

Příklad

- Zajímá nás odpor $R(U, I) = \frac{U}{I}$.
- Opakovaným měřením (U, I) jsme zjistili μ_U, μ_I, σ_U^2, σ_I^2 a $\mathrm{cov}(U, I)$.
- První dva členy Taylorova rozvoje:

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} + \frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U, \mu_I} (U - \mu_U) + \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U, \mu_I} (I - \mu_I) = \frac{\mu_U}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_I}(U - \mu_U) - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I).$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$
  se středními hodnotami $E[x_i] = \mu_i$ a kovariancemi $\mathrm{cov}(x_i, x_j)$ $(\mathrm{cov}(x_i, x_i) = \sigma_i^2)$.
- Výsledná veličina $y = y(\boldsymbol{x})$.
- Jaká je očekávaná hodnota a rozptyl veličiny y?
- Aproximujeme y dvěma členy Taylorova rozvoje okolo bodu $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)$:

$$y(\boldsymbol{x}) \approx y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) \cancel{+ ... + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k y}{\partial x_i^k}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)^k + ...}$$

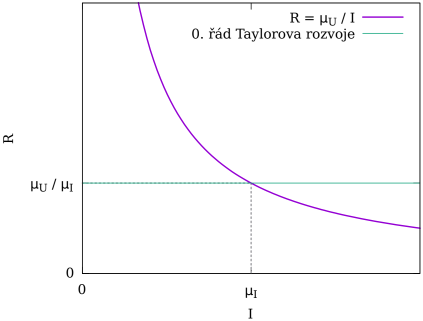
Příklad

- Zajímá nás odpor $R(U, I) = \frac{U}{I}$.
- Opakovaným měřením (U, I) jsme zjistili μ_U, μ_I, σ_U^2, σ_I^2 a $\mathrm{cov}(U, I)$.
- První dva členy Taylorova rozvoje:

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} + \frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U, \mu_I} (U - \mu_U) + \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U, \mu_I} (I - \mu_I) = \frac{\mu_U}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_I}(U - \mu_U) - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I).$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

Taylorův rozvoj v proměnné I:

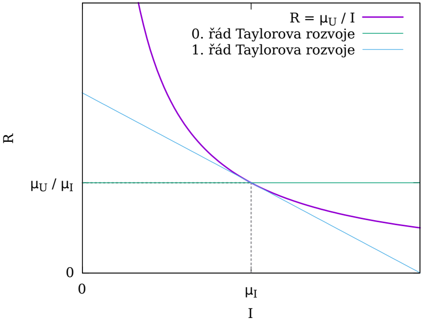


Aproximace konstantou.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I}.$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

Taylorův rozvoj v proměnné I:

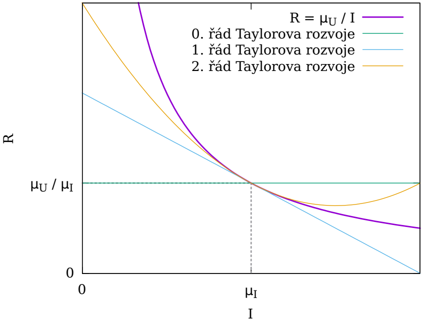


Aproximace přímkou.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I).$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

Taylorův rozvoj v proměnné I:

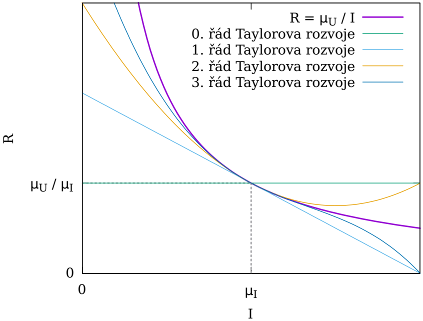


Aproximace polynomem 2. řádu.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I) + \frac{\mu_U}{\mu_I^3}(I - \mu_I)^2$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

Taylorův rozvoj v proměnné I:

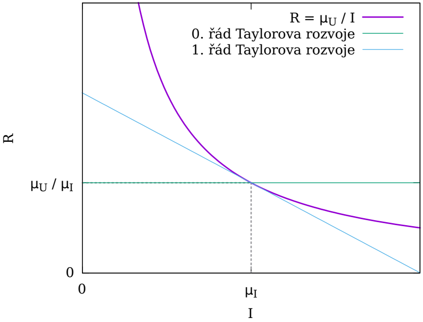


Aproximace polynomem 3. řádu.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I-\mu_I) + \frac{\mu_U}{\mu_I^3}(I-\mu_I)^2 - \frac{\mu_U}{\mu_I^4}(I-\mu_I)^3$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

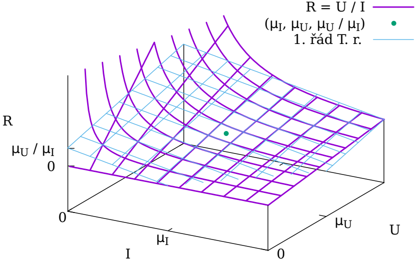
Taylorův rozvoj v proměnné I:



Aproximace přímkou.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I).$$

Taylorův rozvoj v obou proměnných:



Aproximace rovinou.

$$R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} - \frac{\mu_U}{\mu_I^2}(I - \mu_I) + \frac{1}{\mu_I}(U - \mu_U).$$

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Očekávaná hodnota:

$$\mu_y = E[y] \approx E\left[y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)\right] = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] = y(\boldsymbol{\mu}).$$

- Rozptyl:

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

$$E\left[y^2\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - \mu_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \operatorname{cov}(x_i, x_j).$$

Příklad

$$\mu_R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} \qquad \sigma_R^2 \approx \left(\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_I\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \operatorname{cov}(U, I)$$

$$\sigma_R^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_I}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\mu_U}{\mu_I^2}\sigma_I\right)^2 - 2\frac{\mu_U}{\mu_I^3}\operatorname{cov}(U, I).$$

Soubor `upf_cv8.ods`

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Očekávaná hodnota:

$$\mu_y = E[y] \approx E\left[y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)\right] = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] = y(\boldsymbol{\mu}).$$

- Rozptyl:

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

$$E\left[y^2\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - \mu_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j).$$

Příklad

$$\mu_R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} \qquad \sigma_R^2 \approx \left(\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_I\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \mathrm{cov}(U, I)$$

$$\sigma_R^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_I}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\mu_U}{\mu_I^2}\sigma_I\right)^2 - 2\frac{\mu_U}{\mu_I^3}\mathrm{cov}(U, I).$$

Soubor `upf_cv8.ods`

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Očekávaná hodnota:

$$\mu_y = E[y] \approx E\left[y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)\right] = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] = y(\boldsymbol{\mu}).$$

- Rozptyl:

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

$$E\left[y^2\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - \mu_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \operatorname{cov}(x_i, x_j).$$

Příklad

$$\mu_R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} \qquad \sigma_R^2 \approx \left(\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_I\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \operatorname{cov}(U, I)$$

$$\sigma_R^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_I}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\mu_U}{\mu_I^2}\sigma_I\right)^2 - 2\frac{\mu_U}{\mu_I^3}\operatorname{cov}(U, I).$$

Soubor `upf_cv8.ods`

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Očekávaná hodnota:

$$\mu_y = E[y] \approx E\left[y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)\right] = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] = y(\boldsymbol{\mu}).$$

- Rozptyl:

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

$$E\left[y^2\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - \mu_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \operatorname{cov}(x_i, x_j).$$

Příklad

$$\mu_R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} \qquad \sigma_R^2 \approx \left(\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_I\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \operatorname{cov}(U, I)$$

$$\sigma_R^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_I}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\mu_U}{\mu_I^2}\sigma_I\right)^2 - 2\frac{\mu_U}{\mu_I^3}\operatorname{cov}(U, I).$$

Soubor `upf_cv8.ods`

Jaká je středí hodnota a rozptyl kombinace více proměnných?

- Očekávaná hodnota:

$$\mu_y = E[y] \approx E\left[y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)\right] = y(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E[x_i - \mu_i] = y(\boldsymbol{\mu}).$$

- Rozptyl:

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

$$E\left[y^2\right] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} E\left[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$\sigma_y^2 = E\left[(y - \mu_y)^2\right] = E\left[y^2\right] - \mu_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \operatorname{cov}(x_i, x_j).$$

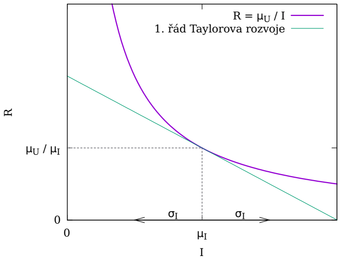
Příklad

$$\mu_R \approx \frac{\mu_U}{\mu_I} \qquad \sigma_R^2 \approx \left(\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \sigma_I\right)^2 + 2\frac{\partial R}{\partial U}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \frac{\partial R}{\partial I}\bigg|_{\mu_U,\mu_I} \operatorname{cov}(U, I)$$

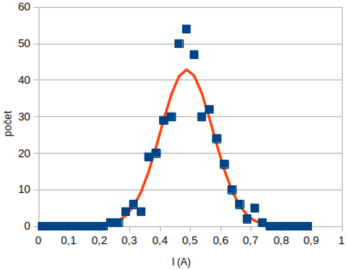
$$\sigma_R^2 \approx \left(\frac{1}{\mu_I}\sigma_U\right)^2 + \left(\frac{\mu_U}{\mu_I^2}\sigma_I\right)^2 - 2\frac{\mu_U}{\mu_I^3}\operatorname{cov}(U, I).$$

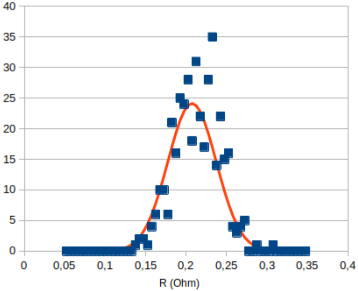
Soubor `upf_cv8.ods`

Kdy přenos chyby nefunguje?

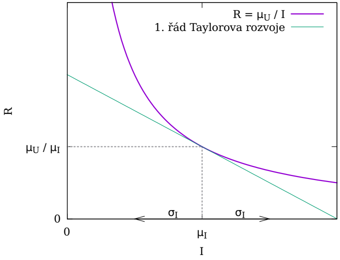


- Pokud x_i nemá konečnou střední hodnotu nebo rozptyl.
- Pokud 1. řád Taylorova rozvoje není dobrá aproximace (na intervalu jedné standardní odchylky). Příklad:
  - $\mu_I = 0.5$, $\sigma_I = 0.09$.
  - Přenosem: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.03$.
  - Simulací: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.03$.
  - $\mu_I = 0.5$, $\sigma_I = 0.3$.
  - Přenosem: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.08$.
  - Simulací: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.14$.

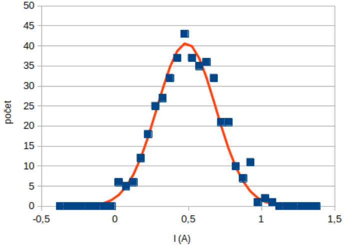


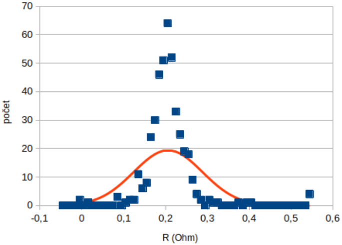


Kdy přenos chyby nefunguje?



- Pokud x_i nemá konečnou střední hodnotu nebo rozptyl.
- Pokud 1. řád Taylorova rozvoje není dobrá aproximace (na intervalu jedné standardní odchylky). Příklad:
  - $\mu_I = 0.5$, $\sigma_I = 0.09$.
  - Přenosem: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.03$.
  - Simulací: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.03$.
  - $\mu_I = 0.5$, $\sigma_I = 0.3$.
  - Přenosem: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.08$.
  - Simulací: $\mu_R \approx 0.2$, $\sigma_R = 0.14$.





Další příklady

- Nezávislé náhodné proměnné:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

- Součet dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a+b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a+b) = 1, \qquad \to \qquad \sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\mathrm{cov}(a,b).$$

- Rozdíl dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a-b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a-b) = -1, \qquad \to \qquad \sigma_{a-b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\mathrm{cov}(a,b).$$

- Aritmetický průměr (x_i nezávislé):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \frac{1}{n}, \qquad \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2$$

- Jsou-li všechny $\sigma_{x_i} = \sigma_x$ stejné,

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Další příklady

- Nezávislé náhodné proměnné:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

- Součet dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a+b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a+b) = 1, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\mathrm{cov}(a,b).$$

- Rozdíl dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a-b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a-b) = -1, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{a-b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\mathrm{cov}(a,b).$$

- Aritmetický průměr (x_i nezávislé):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \frac{1}{n}, \qquad \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2$$

- Jsou-li všechny $\sigma_{x_i} = \sigma_x$ stejné,

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Další příklady

- Nezávislé náhodné proměnné:

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x_j}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \operatorname{cov}(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}}\right)^2 \sigma_{x_i}^2$$

- Součet dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a+b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a+b) = 1, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2\operatorname{cov}(a,b).$$

- Rozdíl dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a-b) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a-b) = -1, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{a-b}^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\operatorname{cov}(a,b).$$

- Aritmetický průměr (x_i nezávislé):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \frac{1}{n}, \qquad \sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_{x_i}^2$$

- Jsou-li všechny $\sigma_{x_i} = \sigma_x$ stejné,

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad \sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Další příklady

- Součin dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(ab) = b, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(ab) = a, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{ab}^2 = b^2\sigma_a^2 + a^2\sigma_b^2 + 2ab\,\mathrm{cov}(a,b).$$

- Podíl dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{a}{b} = \frac{1}{b}, \qquad \frac{\partial}{\partial b}\frac{a}{b} = -\frac{a}{b^2}, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{\frac{a}{b}}^2 = \frac{\sigma_a^2}{b^2} + \frac{a^2\sigma_b^2}{b^4} - 2\frac{a}{b^3}\,\mathrm{cov}(a,b).$$

- Pro a a b nezávislé můžeme napsat jak pro $y = ab$, tak pro $y = a/b$

$$\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}.$$

Příklad

- Soubor upf_cv8.ods, list 3.
- Generování náhodné proměnné $x \in N(\mu, \sigma)$ v Excelu metodou inverzní funkce:

$$x = F^{-1}(t), \qquad \text{kde} \quad t \in U(0,1) \quad \text{a} \quad F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right].$$

```
NORM.INV(RAND(); mu; sigma)
```

- Porovnáme standardní odchylky spočítané přenosem chyb s těmi spočítanými ze simulovaných dat.

Další příklady

- Součin dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}(ab) = b, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(ab) = a, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{ab}^2 = b^2\sigma_a^2 + a^2\sigma_b^2 + 2ab\,\mathrm{cov}(a,b).$$

- Podíl dvou proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{a}{b} = \frac{1}{b}, \qquad \frac{\partial}{\partial b}\frac{a}{b} = -\frac{a}{b^2}, \qquad \rightarrow \qquad \sigma_{\frac{a}{b}}^2 = \frac{\sigma_a^2}{b^2} + \frac{a^2\sigma_b^2}{b^4} - 2\frac{a}{b^3}\,\mathrm{cov}(a,b).$$

- Pro a a b nezávislé můžeme napsat jak pro $y = ab$, tak pro $y = a/b$

$$\frac{\sigma_y^2}{y^2} = \frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}.$$

Příklad

- Soubor `upf_cv8.ods`, list 3.
- Generování náhodné proměnné $x \in N(\mu, \sigma)$ v Excelu metodou inverzní funkce:

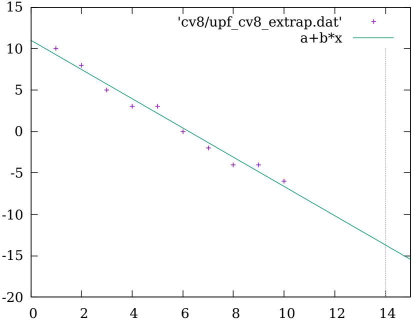
$$x = F^{-1}(t), \qquad \text{kde} \quad t \in U(0,1) \quad \text{a} \quad F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right].$$

```
NORM.INV(RAND(); mu; sigma)
```

- Porovnáme standardní odchylky spočítané přenosem chyb s těmi spočítanými ze simulovaných dat.

Příklad

- Nafitovali jsme data lineární závislostí v programu gnuplot (`upf_cv8_extrap.dat`, `upf_cv8_extrap.plt`)
- Jakou hodnotu můžeme očekávat v bodě $x = 14$? S jakou přesností?

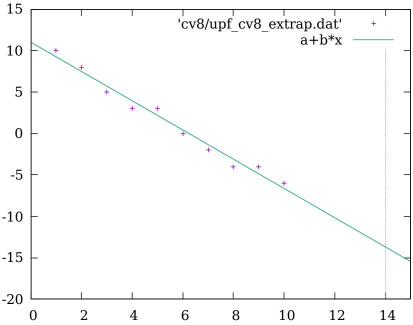


- Výsledky fitu:
  $a = 11.88 \pm 0.53$,
  $b = -1.921 \pm 0.086$,
  $\mathrm{cor}(a, b) = -0.886$
- odhad očekávané hodnoty:
  $$\mu = \mu_a + \mu_b x$$
- odhad chyby:
  $$\frac{\partial}{\partial a}(a + bx) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a + bx) = x.$$
  $$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_a^2 + (x\sigma_b)^2 + 2x\sigma_a\sigma_b \mathrm{cor}(a, b)}$$
- Interval věrohodnosti na úrovni 1σ:
  $$a + bx \pm \sigma(x).$$
  (68 % pravděpodobnost, že nové měření na daném x padne dovnitř)

Další příklady

Příklad

- Nafitovali jsme data lineární závislostí v programu gnuplot (`upf_cv8_extrap.dat`, `upf_cv8_extrap.plt`)
- Jakou hodnotu můžeme očekávat v bodě $x = 14$? S jakou přesností?



- Výsledky fitu:
  $a = 11.88 \pm 0.53$,
  $b = -1.921 \pm 0.086$,
  $\mathrm{cor}(a, b) = -0.886$
- odhad očekávané hodnoty:

$$\mu = \mu_a + \mu_b x$$

- odhad chyby:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a + bx) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a + bx) = x.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_a^2 + (x\sigma_b)^2 + 2x\sigma_a\sigma_b \mathrm{cor}(a, b)}$$

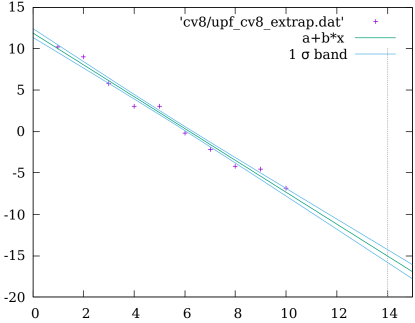
- Interval věrohodnosti na úrovni 1σ:

$$a + bx \pm \sigma(x).$$

(68 % pravděpodobnost, že nové měření na daném x padne dovnitř)

Příklad

- Nafitovali jsme data lineární závislostí v programu gnuplot (`upf_cv8_extrap.dat`, `upf_cv8_extrap.plt`)
- Jakou hodnotu můžeme očekávat v bodě $x = 14$? S jakou přesností?



- Výsledky fitu:
  $a = 11.88 \pm 0.53$,
  $b = -1.921 \pm 0.086$,
  $\mathrm{cor}(a, b) = -0.886$
- odhad očekávané hodnoty:

$$\mu = \mu_a + \mu_b x$$

- odhad chyby:

$$\frac{\partial}{\partial a}(a + bx) = 1, \qquad \frac{\partial}{\partial b}(a + bx) = x.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma_a^2 + (x\sigma_b)^2 + 2x\sigma_a\sigma_b\mathrm{cor}(a, b)}$$

- Interval věrohodnosti na úrovni 1σ:

$$a + bx \pm \sigma(x).$$

(68 % pravděpodobnost, že nové měření na daném x padne dovnitř)