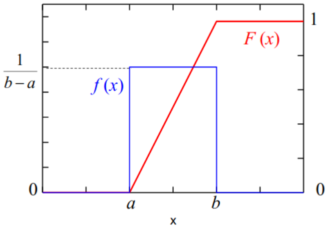
Úvod do praktické fyziky, cvičení 6
Rovnoměrné, normální a Cauchyho rozdělení

Jan Matoušek

3. 11. 2020

UNIVERZITA KARLOVA
Matematicko-fyzikální
fakulta

Rovnoměrné rozdělení $U(a, b)$



- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1$$

- Střední hodnota (výpočet viz cvičení 3)

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}.$$

- Rozptyl (výpočet viz cvičení 3)

$$V[x] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

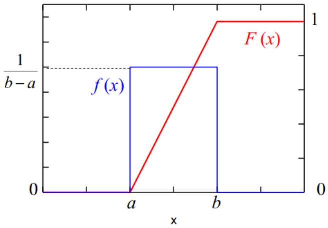
- Distribuční funkce

$$F(x|a,b) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < b, \\ \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{b-a}\left[\xi\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ \int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

$$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = F(\mu+\sigma|a,b) - F(\mu-\sigma|a,b) = \frac{\mu+\sigma-\mu+\sigma}{b-a} = \frac{2\sigma}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577.$$

Rovnoměrné rozdělení $U(a,b)$



- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1$$

- Střední hodnota (výpočet viz cvičení 3)

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}.$$

- Rozptyl (výpočet viz cvičení 3)

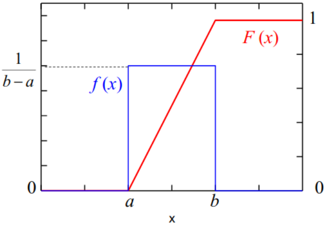
$$V[x] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Distribuční funkce

$$F(x|a,b) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0 \quad \text{pro } x < b, \\ \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{b-a}\left[\xi\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ \int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 \quad \text{pro } x > b. \end{cases}$$

- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$?

$$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = F(\mu+\sigma|a,b) - F(\mu-\sigma|a,b) = \frac{\mu+\sigma-\mu+\sigma}{b-a} = \frac{2\sigma}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577.$$



- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = 1$$

- Střední hodnota (výpočet viz cvičení 3)

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \frac{b+a}{2}.$$

- Rozptyl (výpočet viz cvičení 3)

$$V[x] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

- Distribuční funkce

$$F(x|a,b) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < b, \\ \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{b-a}\left[\xi\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b, \\ \int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi = 1 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$?

$$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = F(\mu+\sigma|a,b) - F(\mu-\sigma|a,b) = \frac{\mu+\sigma-\mu+\sigma}{b-a} = \frac{2\sigma}{b-a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

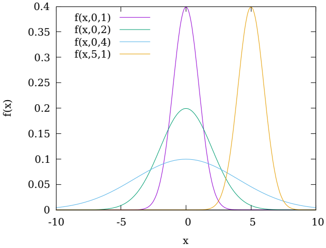
- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = 1.$$

(modře je tzv. Gaussův integrál $= \sqrt{\pi}$)



- Střední hodnota

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma y + \mu)e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \mu.$$

(lichá funkce integrovaná symetricky kolem 0 dá 0)

- Rozptyl

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

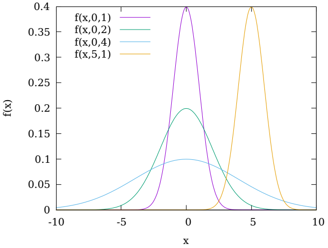
- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = 1.$$

(modře je tzv. Gaussův integrál $= \sqrt{\pi}$)



- Střední hodnota

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma y + \mu)e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \mu.$$

(lichá funkce integrovaná symetricky kolem 0 dá 0)

- Rozptyl

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

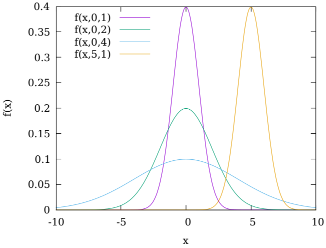
- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y \;= 1.$$

(modře je tzv. Gaussův integrál $= \sqrt{\pi}$)



- Střední hodnota

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma y+\mu)e^{-y^2}\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \mu.$$

(lichá funkce integrovaná symetricky kolem 0 dá 0)

- Rozptyl

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

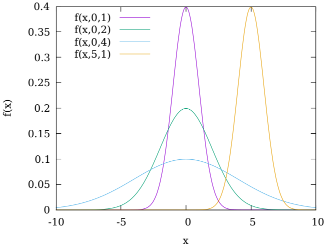
- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\sqrt{2}\sigma\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = 1.$$

(modře je tzv. Gaussův integrál $= \sqrt{\pi}$)

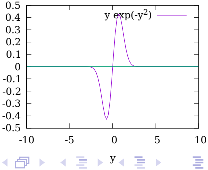


- Střední hodnota

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma y + \mu)e^{-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2}\mathrm{d}y + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \mu.$$

(lichá funkce integrovaná symetricky kolem 0 dá 0)



- Rozptyl

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

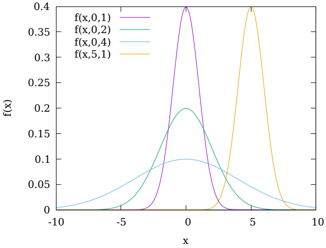
- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Ověření normalizace:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2}\sigma \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = 1.$$

(modře je tzv. Gaussův integrál $= \sqrt{\pi}$)



- Střední hodnota

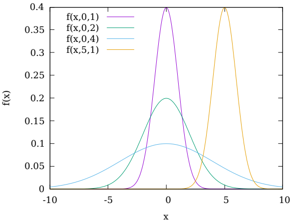
$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\mathrm{d}x = \left|\text{subst. } y = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma y + \mu) e^{-y^2} \mathrm{d}y$$
$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} \mathrm{d}y + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \mu.$$

(lichá funkce integrovaná symetricky kolem 0 dá 0)

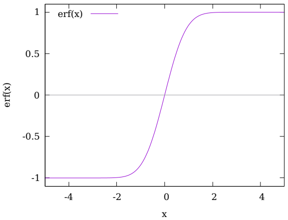
- Rozptyl

$$V[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\mathrm{d}x = \sigma^2.$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$



Hustota pravděpodobnosti.



Error funkce

- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Error funkce – jedna z funkcí, které se nedají vyjádřit pomocí základních (sin, exp...)

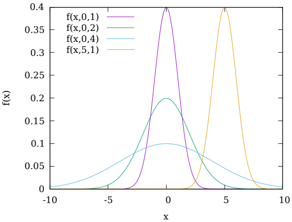
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

- Distribuční funkce

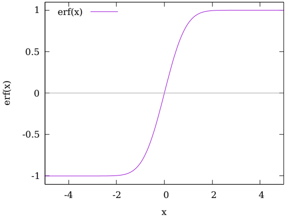
$$F(x|\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \left| \text{subst. } y = \frac{\xi-\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$



Hustota pravděpodobnosti.



Error funkce

- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

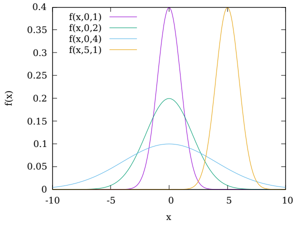
- Error funkce – jedna z funkcí, které se nedají vyjádřit pomocí základních (sin, exp...)

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

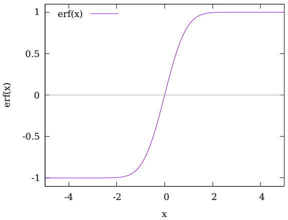
- Distribuční funkce

$$F(x|\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \left|\text{subst. } y = \frac{\xi-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

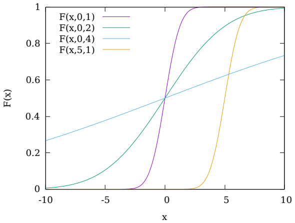
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$



Hustota pravděpodobnosti.



Error funkce



Distribuční funkce.

- Hustota pravděpodobnosti

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- Error funkce – jedna z funkcí, které se nedají vyjádřit pomocí základních (sin, exp...)

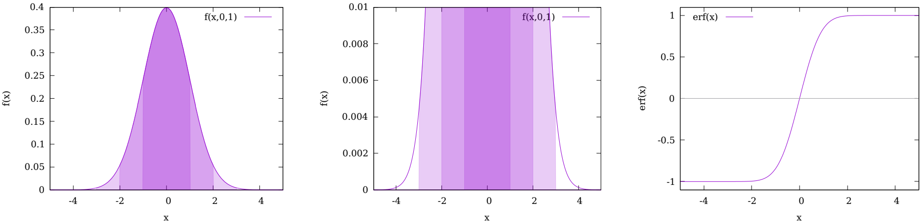
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

- Distribuční funkce

$$F(x|\mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \left|\text{subst. } y = \frac{\xi-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} \mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{y(x)} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$



- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

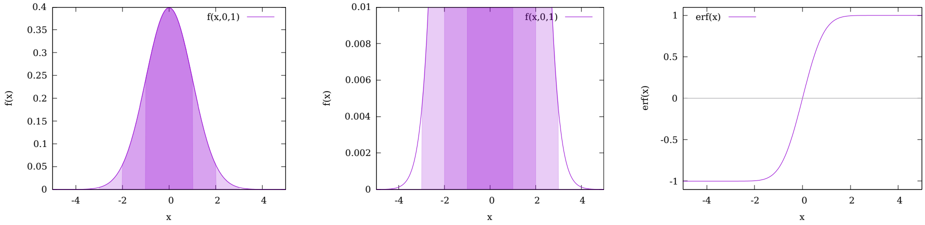
$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= F(\mu + \sigma | a, b) - F(\mu - \sigma | a, b) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.683.
\end{aligned}$$

- Další násobky σ:

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.954, \qquad P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.997.$$

Zápis výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu} \pm \hat{\sigma})$ $[x]$ implicitně říká, že náhodná proměnná x má normální rozdělení. Další měření padne do intervalu $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ s pravděpodobností asi 68.3 %.

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$



- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

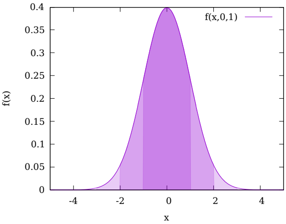
$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= F(\mu + \sigma | a, b) - F(\mu - \sigma | a, b) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.683.
\end{aligned}
$$

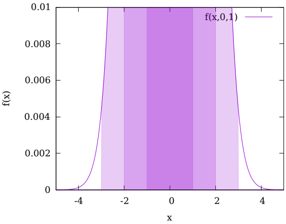
- Další násobky σ:

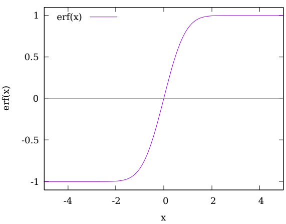
$$
P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.954, \qquad P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.997.
$$

Zápis výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu} \pm \hat{\sigma})$ $[x]$ implicitně říká, že náhodná proměnná x má normální rozdělení. Další měření padne do intervalu $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ s pravděpodobností asi 68.3 %.

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$







- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

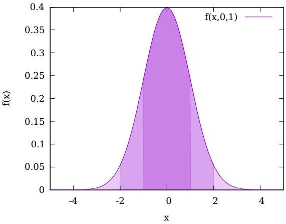
$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= F(\mu + \sigma | a, b) - F(\mu - \sigma | a, b) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.683. \end{aligned}$$

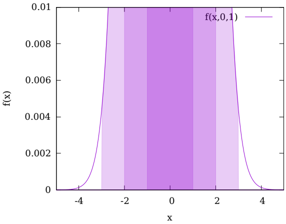
- Další násobky σ:

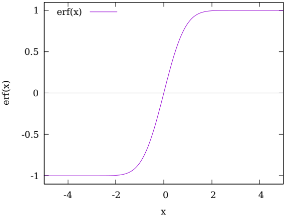
$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \mathrm{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.954, \qquad P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \mathrm{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.997.$$

Zápis výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu} \pm \hat{\sigma})$ $[x]$ implicitně říká, že náhodná proměnná x má normální rozdělení. Další měření padne do intervalu $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ s pravděpodobností asi 68.3 %.

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$







- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

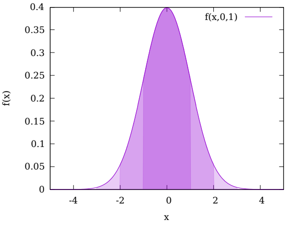
$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= F(\mu + \sigma | a, b) - F(\mu - \sigma | a, b) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.683. \end{aligned}$$

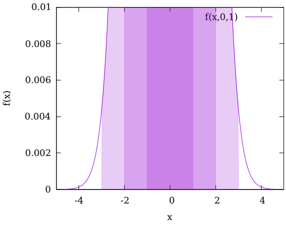
- Další násobky σ:

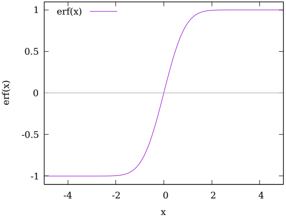
$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.954, \qquad P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.997.$$

Zápis výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu} \pm \hat{\sigma})\ [x]$ implicitně říká, že náhodná proměnná x má normální rozdělení. Další měření padne do intervalu $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ s pravděpodobností asi 68.3 %.

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$







- Jaká je pravděpodobnost, že x padne do intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) &= F(\mu + \sigma | a, b) - F(\mu - \sigma | a, b) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.683. \end{aligned}$$

- Další násobky σ:

$$P(\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.954, \qquad P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.997.$$

Zápis výsledku měření ve tvaru $x = (\hat{\mu} \pm \hat{\sigma})\ [x]$ implicitně říká, že náhodná proměnná x má normální rozdělení. Další měření padne do intervalu $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ s pravděpodobností asi 68.3 %.

Transformace distribuce náhodné proměnné

Mějme náhodnou proměnnou x popsanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.
Jakou hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ má proměnná $y = h(x)$?

- Funkce $h(x)$ musí být monotónní.
- $g(y_1)$ udává pravděpodobnost, že y leží v intervalu $(y_1, y_1 + \delta)$

$$g(y_1)\,\delta = P\big(y \in (y_1, y_1 + \delta)\big)$$
$$= P\big(x \in (h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_1 + \delta))\big)$$

- Definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{a(x+\delta) - a(x)}{\delta}$$

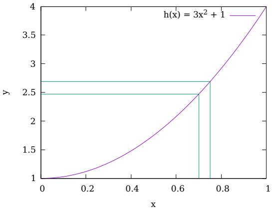
- Takže kolik je $h^{-1}(y_1 + \delta)$?

$$h^{-1}(y_1 + \delta) = \delta \frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1) + h^{-1}(y_1)$$

- Dosadíme a dostaneme (absolutní hodnota – pro případ, že by $h(x)$ byla klesající)

$$g(y_1)\,\delta = P\left[x \in \left(h^{-1}(y_1)), h^{-1}(y_1) + \delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|\right)\right] = f\left(h^{-1}(y_1)\right)\delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|$$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|$$



Příklad: $x \in U(0,1)$ a $y = h(x) = 3x^2 + 1$.

Transformace distribuce náhodné proměnné

Mějme náhodnou proměnnou x popsanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Jakou hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ má proměnná $y = h(x)$?

- Funkce $h(x)$ musí být monotónní.
- $g(y_1)$ udává pravděpodobnost, že y leží v intervalu $(y_1, y_1 + \delta)$

$$\begin{aligned} g(y_1)\,\delta &= P\big(y \in (y_1, y_1 + \delta)\big) \\ &= P\big(x \in (h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_1 + \delta))\big) \end{aligned}$$

- Definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{a(x+\delta) - a(x)}{\delta}$$

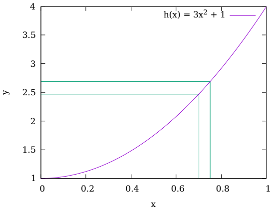
- Takže kolik je $h^{-1}(y_1 + \delta)$?

$$h^{-1}(y_1 + \delta) = \delta \frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1) + h^{-1}(y_1)$$

- Dosadíme a dostaneme (absolutní hodnota – pro případ, že by $h(x)$ byla klesající)

$$g(y_1)\,\delta = P\left[x \in \left(h^{-1}(y_1)), h^{-1}(y_1) + \delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|\right)\right] = f\left(h^{-1}(y_1)\right)\delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|$$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|$$



Příklad: $x \in U(0,1)$ a $y = h(x) = 3x^2 + 1$.

Transformace distribuce náhodné proměnné

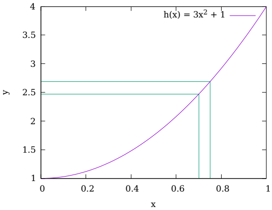
Mějme náhodnou proměnnou x popsanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.
Jakou hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ má proměnná $y = h(x)$?

- Funkce $h(x)$ musí být monotónní.
- $g(y_1)$ udává pravděpodobnost, že y leží v intervalu $(y_1, y_1 + \delta)$

$$\begin{aligned} g(y_1)\,\delta &= P\big(y \in (y_1, y_1 + \delta)\big) \\ &= P\big(x \in (h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_1 + \delta))\big) \end{aligned}$$

- Definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{a(x+\delta) - a(x)}{\delta}$$



Příklad: $x \in U(0,1)$ a $y = h(x) = 3x^2 + 1$.

- Takže kolik je $h^{-1}(y_1 + \delta)$?

$$h^{-1}(y_1 + \delta) = \delta \frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1) + h^{-1}(y_1)$$

- Dosadíme a dostaneme (absolutní hodnota – pro případ, že by $h(x)$ byla klesající)

$$g(y_1)\,\delta = P\left[x \in \left(h^{-1}(y_1)), h^{-1}(y_1) + \delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|\right)\right] = f\left(h^{-1}(y_1)\right)\delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|$$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|$$

Transformace distribuce náhodné proměnné

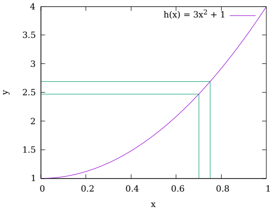
Mějme náhodnou proměnnou x popsanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.
Jakou hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ má proměnná $y = h(x)$?

- Funkce $h(x)$ musí být monotónní.
- $g(y_1)$ udává pravděpodobnost, že y leží v intervalu $(y_1, y_1 + \delta)$

$$g(y_1)\,\delta = P\big(y \in (y_1, y_1 + \delta)\big) = P\big(x \in (h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_1 + \delta))\big)$$

- Definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{a(x+\delta) - a(x)}{\delta}$$



Příklad: $x \in U(0,1)$ a $y = h(x) = 3x^2 + 1$.

- Takže kolik je $h^{-1}(y_1 + \delta)$?

$$h^{-1}(y_1 + \delta) = \delta \frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1) + h^{-1}(y_1)$$

- Dosadíme a dostaneme (absolutní hodnota – pro případ, že by $h(x)$ byla klesající)

$$g(y_1)\,\delta = P\left[x \in \left(h^{-1}(y_1)), h^{-1}(y_1) + \delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|\right)\right] = f\left(h^{-1}(y_1)\right)\delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|$$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|$$

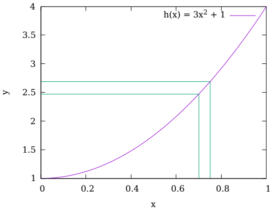
Mějme náhodnou proměnnou x popsanou hustotou pravděpodobnosti $f(x)$.
Jakou hustotu pravděpodobnosti $g(y)$ má proměnná $y = h(x)$?

- Funkce $h(x)$ musí být monotónní.
- $g(y_1)$ udává pravděpodobnost, že y leží v intervalu $(y_1, y_1 + \delta)$

$$g(y_1)\,\delta = P\big(y \in (y_1, y_1 + \delta)\big) = P\big(x \in (h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_1 + \delta))\big)$$

- Definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{a(x + \delta) - a(x)}{\delta}$$



Příklad: $x \in U(0, 1)$ a $y = h(x) = 3x^2 + 1$.

- Takže kolik je $h^{-1}(y_1 + \delta)$?

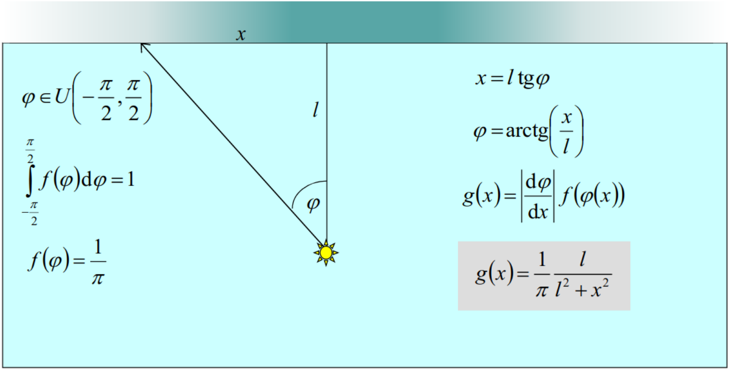
$$h^{-1}(y_1 + \delta) = \delta \frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1) + h^{-1}(y_1)$$

- Dosadíme a dostaneme (absolutní hodnota – pro případ, že by $h(x)$ byla klesající)

$$g(y_1)\,\delta = P\left[x \in \left(h^{-1}(y_1)), h^{-1}(y_1) + \delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|\right)\right] = f\left(h^{-1}(y_1)\right)\delta\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_1)\right|$$

$$g(y) = f\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}h^{-1}}{\mathrm{d}y}(y)\right|$$

Cauchyho rozdělení



$$\varphi \in U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 1$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}$$

$$x = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

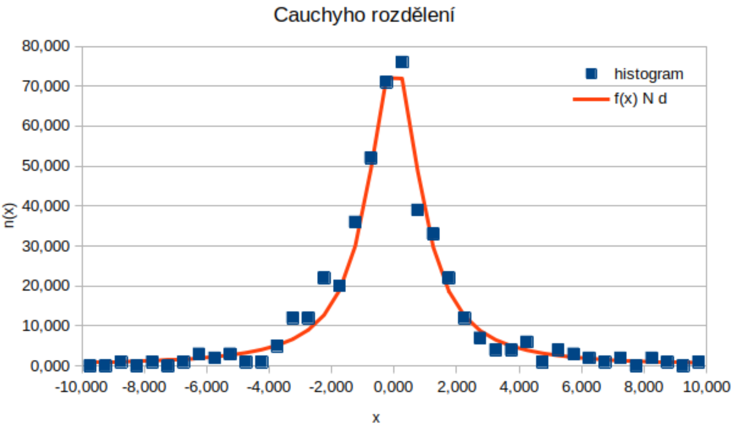
$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$g(x) = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right| f(\varphi(x))$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2 + x^2}}$$

Cauchyho rozdělení

Demonstrace: Generujeme $N = 500$ čísel $\phi \in U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a z nich spočítáme čísla $x = l\,\mathrm{tg}\phi$. Vytvoříme jejich histogram a porovnáme ho s hustotou pravděpodobnosti Cauchyho rozdělení $f(x) = \frac{1}{l}\frac{1}{l^2+x^2}$ (pro srovnání s histogramem násobíme N a šířkou binu d). (`cv6_cauchy.ods`).



Cauchyho rozdělení

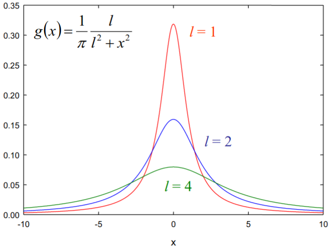
Cauchyho rozdělení

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2+x^2}$$

$$\gamma=2l$$

Breit-Wignerovo rozdělení

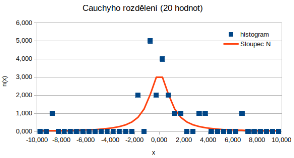
$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\gamma/2}{\gamma^2/4+(x-x_0)^2}$$



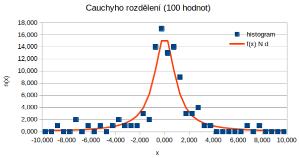
- Střední hodnota $E[x]$: není definována (viz přednáška prof. Čížka), nebo jen přes limitu.
- Rozptyl $V[x]$: nekonečný (také viz přednáška).

Demonstrace: Z dříve vygenerovaných Cauchyovsky rozdělených čísel x budeme „kumulativně“ počítat průměr (odhad střední hodnoty) a stadardní odchylku (odhad $\sqrt{V[x]}$). Spočítáme tyto hodnoty s použitím jen prvních dvou čísel, pak prvních tří, čtyř atd. (`cv6_cauchy.ods`)

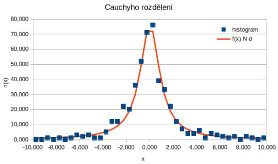
Cauchyho rozdělení



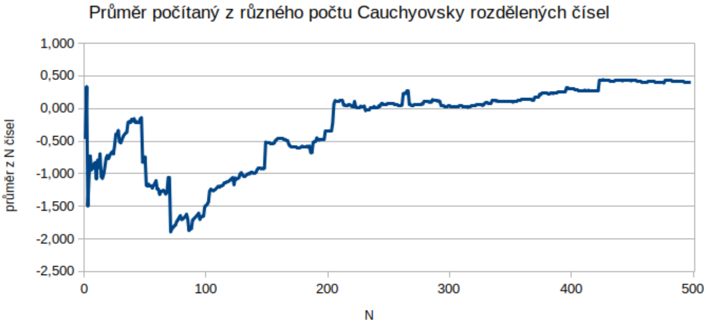
Histogram ze 20 hodnot x.



Histogram ze 100 hodnot x.

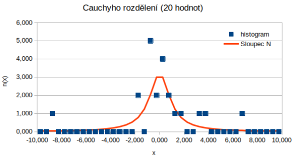


Histogram z 500 hodnot x.

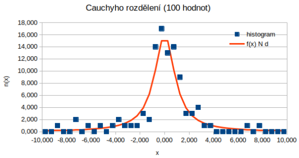


Průměr nekonverguje k očekávané hodnotě 0.
Skok, jaký vidíme kolem 50. měření může nastat kdykoliv znovu.

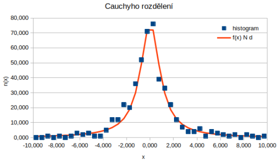
Cauchyho rozdělení



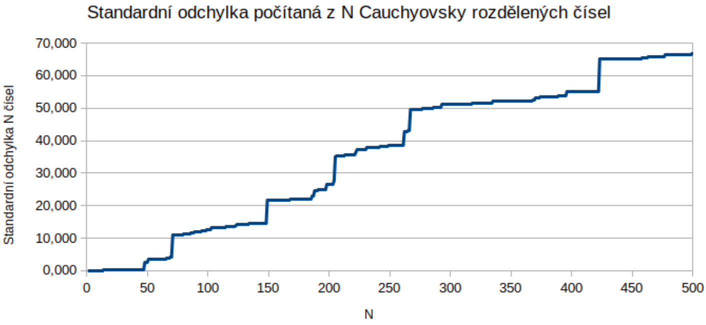
Histogram ze 20 hodnot x.



Histogram ze 100 hodnot x.

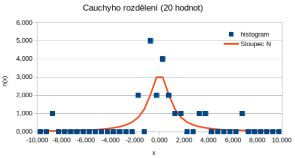


Histogram z 500 hodnot x.

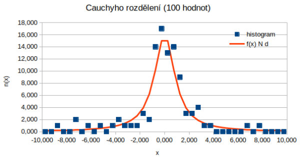


Standardní odchylka roste s počtem měření, protože rozptyl je nekonečný.

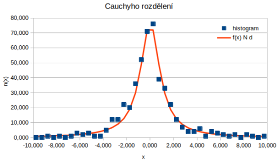
Cauchyho rozdělení



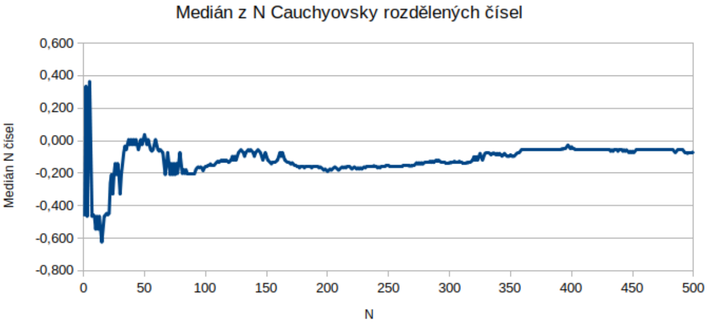
Histogram ze 20 hodnot x.



Histogram ze 100 hodnot x.



Histogram z 500 hodnot x.



Jako odhad středu distribuce lze použít medián.

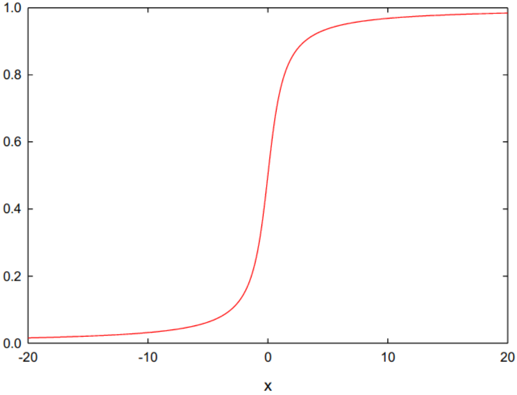
Cauchyho rozdělení

Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

medián: $F(x_m) = \frac{1}{2} \longrightarrow x_m = 0$



Příklady

Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.
Dále nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.
Jaká je pravděpodobnost, že $|x| > 2$ pro obě rozdělení?