Úvod do praktické fyziky, cvičení 3
Náhodná proměnná a její popis

Jan Matoušek

13. 10. 2020

UNIVERZITA KARLOVA
Matematicko-fyzikální
fakulta

Generátory náhodných čísel

Skutečně náhodná čísla

- Měření fyzikálního procesu, který je náhodný nebo jej nelze modelovat, např.
  - hod kostkou nebo mincí,
  - elektronický šum,
  - radioaktivní rozpad.
- „Hardwarový generátor“.

Pseudo-náhodná čísla

- Generována algoritmem.
- Jsou reprodukovatelná (při znalosti počátečního stavu).
- Jednoduchý příklad: Lineární kongruentní generátor

$$N_{i+1} = (aN_i + b) \mod m,$$

  - a, b, m jsou velká přirozená čísla.
  - $0 < a < m$, $0 < b < m$.
  - N_0 je „semínko“ – seed.
  - Chceme-li $X_i \in (0, 1)$: $X_i = N_i/m$.
  - Perioda: maximálně m.
  - Kvalita generátoru silně závisí na volbě a, b, m.
- Další generátory, např. Mersenne twister (základní pro Excel, Python, Matlab...).

Generátory náhodných čísel

Skutečně náhodná čísla

- Měření fyzikálního procesu, který je náhodný nebo jej nelze modelovat, např.
  - hod kostkou nebo mincí,
  - elektronický šum,
  - radioaktivní rozpad.
- „Hardwarový generátor".

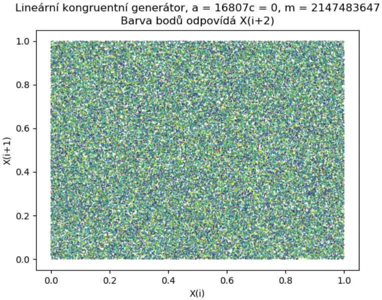
Pseudo-náhodná čísla

- Generována algoritmem.
- Jsou reprodukovatelná (při znalosti počátečního stavu).
- Jednoduchý příklad: Lineární kongruentní generátor

$$N_{i+1} = (aN_i + b) \mod m,$$

  - a, b, m jsou velká přirozená čísla.
  - $0 < a < m$, $0 < b < m$.
  - N_0 je „semínko" – seed.
  - Chceme-li $X_i \in (0, 1)$: $X_i = N_i/m$.
  - Perioda: maximálně m.
  - Kvalita generátoru silně závisí na volbě a, b, m.
- Další generátory, např. Mersenne twister (základní pro Excel, Python, Matlab...).

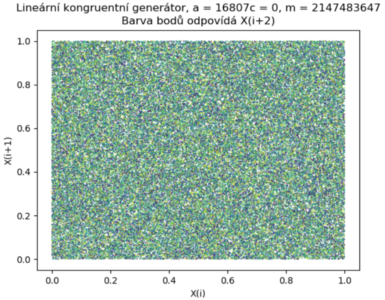
Spektrální test generátoru

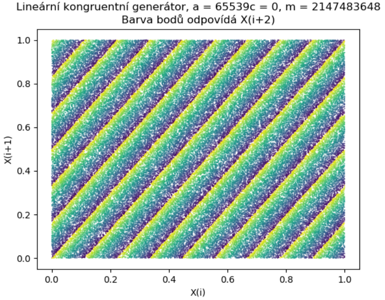


- Testuje korelace po sobě jdoucích náhodných čísel.
- Lineární kongruentní generátory jsou k tomu náchylné.
- Bodový graf, souřadnice bodu např. X_i, X_{i+1}, X_{i+2}.
- Jeden rozměr se dá nahradit barvou bodu.
- Známý „odstrašující případ“: generátor RANDU ze 60. let od IBM.

Vyzkoušejte udělat test nativního generátoru v Pythonu (viz příklad na webu). Případně napište funkci pro lineární kongruentní generátor a vyzkoušejte různá nastavení parametrů a, b, m, N_0.

Spektrální test generátoru



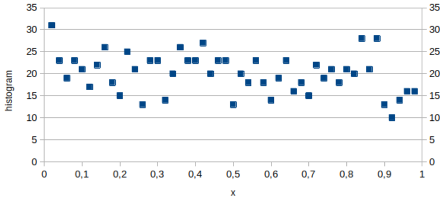


- Testuje korelace po sobě jdoucích náhodných čísel.
- Lineární kongruentní generátory jsou k tomu náchylné.
- Bodový graf, souřadnice bodu např. X_i, X_{i+1}, X_{i+2}.
- Jeden rozměr se dá nahradit barvou bodu.
- Známý „odstrašující případ“: generátor RANDU ze 60. let od IBM.

Vyzkoušejte udělat test nativního generátoru v Pythonu (viz příklad na webu). Případně napište funkci pro lineární kongruentní generátor a vyzkoušejte různá nastavení parametrů a, b, m, N_0.

Rovnoměrné rozdělení v Excelu

Vygenerujte v Excelu $N = 1000$ náhodných čísel z rovnomněrného rozdělení $U(0,1)$ a nakreslete histogram nasimulovaných hodnot.



- Náhodné číslo z $U(0,1)$: `RAND()` (případně `NÁHČÍSLO()`).
- Histogram: `FREQUENCY(sample;bins)`, (případně `ČETNOSTI()`). Je to maticový vzorec – výstupem je sloupec buněk.
- Maticové vzorce v Excelu:
  - 1. označit výstupní oblast
  - 2. napsat vzorec a Ctrl+Shift+ENTER

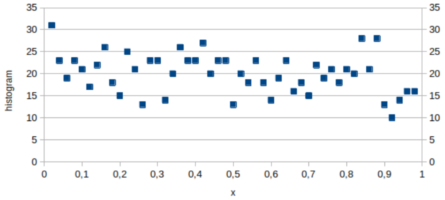
Normalizujte histogram, aby jeho plocha byla jednotková,

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \delta = 1.$$

Zde δ je šířka binu, tedy $\delta = \frac{1}{N}$.

Rovnoměrné rozdělení v Excelu

Vygenerujte v Excelu $N = 1000$ náhodných čísel z rovnomněrného rozdělení $U(0,1)$ a nakreslete histogram nasimulovaných hodnot.



- Náhodné číslo z $U(0,1)$: `RAND()` (případně `NÁHČÍSLO()`).
- Histogram: `FREQUENCY(sample;bins)`, (případně `ČETNOSTI()`). Je to maticový vzorec – výstupem je sloupec buněk.
- Maticové vzorce v Excelu:
  - 1. označit výstupní oblast
  - 2. napsat vzorec a Ctrl+Shift+ENTER

Normalizujte histogram, aby jeho plocha byla jednotková,

$$\sum_{i=0}^{N} m_i \delta = 1.$$

Zde δ je šířka binu, tedy $\delta = \frac{1}{N}$.

Rovnoměrné rozdělení v Excelu

Rozdělení spojité náhodné proměnné je dáno hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ nebo distribuční funkcí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

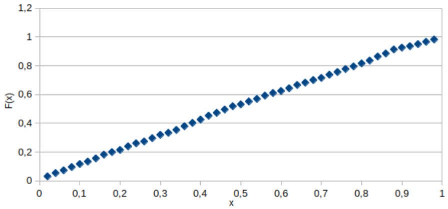
Normovaný histogram m_i odpovídá hustotě pravděpodobnosti $f(x_i)$. Nakreslete kumulativní histogram $F_i = \sum_{j=0}^{i} m_j \delta$, který odpovídá distribuční funkci $F(x)$.

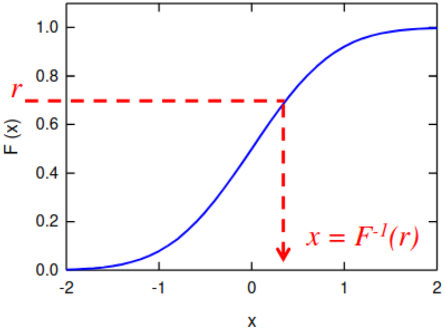
Rovnoměrné rozdělení v Excelu

Rozdělení spojité náhodné proměnné je dáno hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ nebo distribuční funkcí

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Normovaný histogram m_i odpovídá hustotě pravděpodobnosti $f(x_i)$. Nakreslete kumulativní histogram $F_i = \sum_{j=0}^{i} m_j \delta$, který odpovídá distribuční funkci $F(x)$.





Nechť x je náhodná proměnná s rozdělením popsaným hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ a distribuční funkcí $F(x)$ potom náhodná proměnná $r = F(x)$ má rovnoměrné rozdělní $U(0,1)$.

- Tedy můžeme z rovnoměrně rozdělené $r \in U(0,1)$ získat proměnnou $x = F^{-1}(r)$.

Doba života vybuzeného stavu elektronů je 100 µs. Při rozpadu emituje foton. Proveďte v Excelu simulaci měření fotoluminiscence (meříme čas t detekce fotonu po vybuzení vzorku). Použijte $N = 200$ hodnot. Nakreslete histogram naměřených hodnot, srovnejte s teoretickou $f(t)$.

- Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{pro} \quad t > 0, \quad \text{jinak} \quad 0.$$

- Distribuční funkce:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \, \mathrm{d}x = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- Inverzní funkce (definujeme $r = F(t)$):

$$1 - r = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln(1 - r) = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau \ln(1 - r) = F^{-1}(r).$$

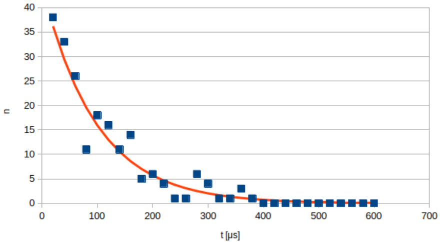
- Tento vztah můžu použít pro generování t s pomocí rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné r. Jednodušší je použít $p = 1 - r$, která je taky rovnoměrně rozdělená mezi 0 a 1.

Doba života vybuzeného stavu elektronů je 100 μs. Při rozpadu emituje foton. Proveďte v Excelu simulaci měření fotoluminiscence (meříme čas t detekce fotonu po vybuzení vzorku). Použijte $N = 200$ hodnot. Nakreslete histogram naměřených hodnot, srovnejte s teoretickou $f(t)$.

- Hustota pravděpodobnosti:
$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{pro} \quad t > 0, \quad \text{jinak} \quad 0.$$
- Distribuční funkce:
$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}}\, dx = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$
- Inverzní funkce (definujeme $r = F(t)$):
$$1 - r = e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\ln(1 - r) = -\frac{t}{\tau}$$
$$t = -\tau \ln(1 - r) = F^{-1}(r).$$
- Tento vztah můžu použít pro generování t s pomocí rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné r. Jednodušší je použít $p = 1 - r$, která je taky rovnoměrně rozdělená mezi 0 a 1.

Monte Carlo simulace

Doba života vybuzeného stavu elektronů je 100 µs. Při rozpadu emituje foton. Proveďte v Excelu simulaci měření fotoluminiscence (meříme čas t detekce fotonu po vybuzení vzorku). Použijte $N = 200$ hodnot. Nakreslete histogram naměřených hodnot, srovnejte s teoretickou $f(t)$.



Histogram t (modré body) a teoretická křivka $f(t)N\Delta$, kde Δ je šířka binu.

```
Ai = RAND()
Bi = -100 * LN(Ai)
```

`D4:D33` horní hranice binů histogramu, histogram: matice `E4:E33` `{=FREQUENCY(B2:B201;D4:D33)}`

(označit E4:E33, napsat vzorec a Ctrl+Shift+Enter)

- Hustota pravděpodobnosti:

$$f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{pro} \quad t > 0, \quad \text{jinak} \quad 0.$$

- Distribuční funkce:

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{x}{\tau}} \, \mathrm{d}x = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- Inverzní funkce (definujeme $r = F(t)$):

$$1 - r = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\ln(1 - r) = -\frac{t}{\tau}$$

$$t = -\tau \ln(1 - r) = F^{-1}(r).$$

- Tento vztah můžu použít pro generování t s pomocí rovnoměrně rozdělené náhodné proměnné r. Jednodušší je použít $p = 1 - r$, která je taky rovnoměrně rozdělená mezi 0 a 1.