1 Rovnoměrné rozdělení U(a,b)

Spojitá náhodná proměnná x se vyskytuje v intervalu $[a, b]$ všude se stejnou pravděpodobností. Mimo tento interval se nevyskytuje nikdy.

$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Normovací podmínka

Použijme definici normovací podmínky pro spojitou náhodnou proměnnou x.

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x|a, b)\mathrm{d}x$$

$$1 = 0 + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x$$

$$1 = \frac{1}{b-a}\left[x\right]_a^b$$

$$1 = \frac{b-a}{b-a}$$

Distribuční funkce

Distribuční funkce $F(x|a, b)$ je definována jako primitivní funkce k hustotě pravděpodobnosti $f(x|a, b)$. Lze ji také definovat pomocí určitého integrálu.

$$F(x|a, b) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t|a, b)\mathrm{d}t$$

pro $x < a$

$$F(x|a, b) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t$$

$$F(x|a, b) = 0$$

pro $x \in [a, b]$

$$F(x|a, b) = 0 + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t$$

$$F(x|a, b) = \frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^x$$

$$F(x|a, b) = \frac{x-a}{b-a}$$

pro $x > b$

$$F(x|a,b) = 0 + \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t$$
$$F(x|a,b) = \frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^b$$
$$F(x|a,b) = 1$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[x] = \mu$ pro spojitou náhodnou proměnnou x pomocí určitého integrálu.

$$E[x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x|a,b)\mathrm{d}x$$
$$E[x] = 0 + \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\mathrm{d}x$$
$$E[x] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b$$
$$E[x] = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}$$
$$E[x] = \frac{a+b}{2}$$

Očekávaná hodnota rovnoměrného rozdělení je rovna aritmetickému průměru krajních hodnot a, b.

Rozptyl

Při výpočtu použijeme vzorec pro výpočet rozptylu $V[x] = \sigma^2$ pro spojitou náhodnou proměnnou x pomocí očekávaných hodnot $E[x^2]$ a $E[x]$.

$$V[x] = E\left[(x-\mu)^2\right]$$
$$V[x] = E\left[x^2\right] - \left(E\left[x\right]\right)^2$$

$$E\left[x^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x|a,b)\mathrm{d}x$$
$$E\left[x^2\right] = 0 + \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
E\left[x^2\right] &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \\
E\left[x^2\right] &= \frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a} \\
E\left[x^2\right] &= \frac{b^2+ab+a^2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V[x] &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
V[x] &= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} \\
V[x] &= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

Ve speciálním případě rovnoměrného rozdělení $\mathrm{U}(-\Delta, \Delta)$, tj. $a = 0$, $b = 1$, je rozptyl $V[x] = \frac{\Delta^2}{3}$ a standardní odchylka $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$, což je rovnost, která udává vztah mezi maximální chybou Δ a standardní chybou σ.

2 Normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$

Spojitá náhodná proměnná x má hustotu pravděpodobnosti danou tzv. Gaussiánem, definovaným pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$$
f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]
$$

Normovací podmínka

Primitivní funkce ke Gaussiánu není analytickou funkcí. Pro výpočet jeho plochy můžeme použít např. triku s polárními souřadnicemi. Definujme standardní dvourozměrný Gaussián pro kartézské proměnné x, y.

$$
f(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right),\ x, z \in \mathbb{R}
$$

V polárních souřadnicích r, φ má díky rovnosti $r^2 = x^2 + y^2$ potom tvar jednorozměrného Gaussiánu.

$$
f(r,\varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right),\ r \in [0,\infty), \varphi \in [0, 2\pi]
$$

Vypočítejme plochu pod dvourozměrným Gaussiánem s využitím vztahu pro plošný element v kartézských a polárních souřadnicích $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&= \int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int\limits_{0}^{\infty}\int r\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r\mathrm{d}r \\
&= [\varphi]_0^{2\pi}\left[-\exp\left(\frac{r^2}{2}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= 2\pi \\
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\
\\
&\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}
\end{aligned}
$$

Plocha pod standardním jednorozměrným Gaussiánem je tedy rovna $\sqrt{2\pi}$.
Nyní si můžeme ověřit normovací podmínku pro hustotu pravděpodobnosti $f(x|\mu,\sigma)$.

$$
\begin{aligned}
1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x|\mu,\sigma)\mathrm{d}x \\
1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x \\
\text{substituce: } y &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\
\mathrm{d}y &= \frac{1}{\sigma}\mathrm{d}x \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]\mathrm{d}y \\
1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}
\end{aligned}
$$

Distribuční funkce

Definujme si chybovou neboli error funkci pomocí určitého integrálu.

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \exp(-t^2)\mathrm{d}t$$

Distribuční funkci $F(x|\mu,\sigma)$ si potom můžeme vyjádřit právě pomocí error funkce.

$$F(x|\mu,\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t|\mu,\sigma)\mathrm{d}t$$

$$F(x|\mu,\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$\text{substituce: } y = \frac{t-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}t$$

$$F(x|\mu,\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$F(x|\mu,\sigma) = (*)\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y + (**)\int\limits_{0}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$(*)\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y$$

$$\text{substituce: } z = \sqrt{2}y$$

$$\mathrm{d}z = \sqrt{2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$(**)\int\limits_{0}^{\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[x]$ pro spojitou náhodnou proměnnou x pomocí určitého integrálu a normovací podmínku.

$$
\begin{aligned}
E[x] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x|\mu,\sigma)\mathrm{d}x \\
E[x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
E[x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [(x-\mu)+\mu] \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
E[x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
&\quad + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
E[x] &= \left[-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \mu \\
E[x] &= \mu
\end{aligned}
$$

Očekávaná hodnota normálního rozdělení je přímo rovna parametru μ.

Rozptyl

Počítejme tentokrát rozptyl přímo z definice jako 2. centrální moment.

$$
\begin{aligned}
V[x] &= E\left[(x-\mu)^2\right] \\
V[x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{per partes: } u(x) &= x-\mu \\
\Rightarrow u'(x) &= 1 \\
\\
v'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x-\mu) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\
\Rightarrow v(x) &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V[x] &= \left[-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&\quad + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
V[x] &= 0 + \sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x \\
V[x] &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Rozptyl normálního rozdělení je přímo roven parametru σ^2, standardní odchylka je tedy rovna σ.

3 Cauchyho rozdělení C(x_0, L)

Spojitá náhodná proměnná x má hustotu pravděpodobnosti danou tzv. Lorentziánem, definovaným pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

$$
f(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi} \frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}
$$

Normovací podmínka

Použijme definici normovací podmínky pro spojitou náhodnou proměnnou x.

$$
\begin{aligned}
1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2} \mathrm{d}x \\
1 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{L}{L^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x - x_0}{L}\right)^2} \mathrm{d}x \\
\text{substituce: } y &= \frac{x - x_0}{L} \\
\mathrm{d}y &= \frac{1}{L} \mathrm{d}x \\
1 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + y^2} \mathrm{d}y \\
1 &= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{\infty} \\
1 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Distribuční funkce

Distribuční funkci $F(x|x_0, L)$ vypočítáme pomocí určitého integrálu.

$$F(x|x_0, L) = \int_{-\infty}^{x} f(t|x_0, L)\mathrm{d}t$$

$$F(x|x_0, L) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi}\frac{L}{L^2 + (t - x_0)^2}\mathrm{d}t$$

$$\text{substituce: } y = \frac{t - x_0}{L}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{L}\mathrm{d}t$$

$$F(x|x_0, L) = \int_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{L}} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + y^2}\mathrm{d}y$$

$$F(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{\frac{x-x_0}{L}}$$

$$F(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{L}\right)\right]$$

Očekávaná hodnota a rozptyl

Očekávaná hodnota $E[x]$ a rozptyl $V[x]$ pro spojitou náhodnou proměnnou x jsou definovány pomocí určitého integrálu. Ani jeden z příslušných integrálů ovšem nemá řešení.

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|x_0, L)\mathrm{d}x$$

$$E[x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x$$

$$E[x] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[x_0 + (x - x_0)\right]\frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x$$

$$E[x] = x_0\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)\frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x$$

$$E[x] = x_0 + \frac{1}{\pi}\left[\ln\left(L^2 + (x - x_0)^2\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$E[x] = \text{n.def}$$

V případě Cauchyho rozdělení pracujeme obvykle namísto s očekávanou hodnotou μ s mediánem $x_m = x_0$, pro který platí:

$$\begin{aligned}
F(x_m|x_0, L) &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\left(\frac{x_m - x_0}{L}\right)\right] &= \frac{1}{2} \\
\mathrm{arctg}\left(\frac{x_m - x_0}{L}\right) &= 0 \\
&\Rightarrow x_m = x_0
\end{aligned}$$

Ověřme si, že ani rozptyl $V[x]$ není definován.

$$\begin{aligned}
V[x] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x|x_0, L)\mathrm{d}x \\
V[x] &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 \frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x \\
V[x] &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L\left[1 - \frac{L^2}{L^2 + (x - x_0)^2}\right]\mathrm{d}x \\
V[x] &= \frac{L}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 1\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}\mathrm{d}x \\
V[x] &= \frac{L}{\pi}[x]_{-\infty}^{\infty} - 1 \\
V[x] &= \mathrm{n.def}
\end{aligned}$$

V případě Cauchyho rozdělení pracujeme namísto se standardní odchylkou σ s pološířkou $\gamma = 2L$, která je definována jako tzv. plná šířka (Lorentziánu) v polovině (jeho) výšky.

$$\begin{aligned}
\gamma &= x_2 - x_1 \\
f(x_{1,2}|x_0, L) &= \frac{1}{2}\max\left[f(x|x_0, L)\right] \\
f(x_{1,2}|x_0, L) &= \frac{1}{2}f(x_0|x_0, L) \\
\frac{1}{\pi}\frac{L}{L^2 + (x_{1,2} - x_0)^2} &= \frac{1}{2\pi L} \\
L^2 + (x_{1,2} - x_0)^2 &= 2L^2 \\
x_{1,2} &= x_0 \pm L \\
\Rightarrow \gamma &= 2L
\end{aligned}$$