

1 Binomické rozdělení

Pravděpodobnost, že při N pokusech zaznameneáme právě k úspěchů, když p je pravděpodobnost jednoho úspěchu, se rovná:

$$P(k|N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$P(k|N, p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Binomická věta:

$$(a+b)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k b^{N-k}$$

Normovací podmínka

Při výpočtu použijeme definici normovací podmínky pro diskrétní náhodnou proměnnou k a binomickou větu.

$$1 = \sum_{k=0}^N P(k|N, p)$$
$$1 = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$1 = [p + (1-p)]^N$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[k] = \mu$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k a normovací podmínku.

$$E[k] = \sum_{k=0}^N k P(k|N, p)$$
$$E[k] = \sum_{k=0}^N k \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$E[k] = 0 + \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

substitute: $m = k - 1$

$$E[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p \cdot p^m (1-p)^{N-1-m}$$

substitute: $M = N - 1$

$$E[k] = Np \sum_{m=0}^M P(m|M, p)$$

$$E[k] = Np$$

Rozptyl

Při výpočtu použijeme vzorec pro výpočet rozptylu $V[k] = \sigma^2$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k pomocí očekávaných hodnot $E[k^2]$ a $E[k]$ a normovací podmínku.

$$V[k] = E[(k - \mu)^2]$$

$$V[k] = E[k^2] - (E[k])^2$$

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^N k^2 P(k|N, p)$$

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^N k^2 \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$E[k^2] = 0 + \sum_{k=1}^N [1 + (k-1)] \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$E[k^2] = \sum_{k=1}^N \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$+ 0 + \sum_{k=2}^N \frac{N!}{(N-k)!(k-2)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

substituce: $m = k - 1$
 $l = k - 2$

$$E[k^2] = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N(N-1)!}{(N-1-m)!m!} p \cdot p^m (1-p)^{N-1-m}$$

$$+ \sum_{l=0}^{N-2} \frac{N(N-1)(N-2)!}{(N-2-l)!l!} p^2 \cdot p^l (1-p)^{N-2-l}$$

substituce: $M = N - 1$
 $L = N - 2$

$$E[k^2] = Np \sum_{m=0}^M P(m|M, p) + N(N-1)p^2 \sum_{l=0}^L P(l|L, p)$$

$$E[k^2] = Np + N(N-1)p^2$$

$$\begin{aligned}
V[k] &= Np + N(N-1)p^2 - (Np)^2 \\
V[k] &= Np + N^2p^2 - Np^2 - N^2p^2 \\
V[k] &= Np(1-p)
\end{aligned}$$

2 Poissonovo rozdělení

V případě, že počet pokusů $N \rightarrow \infty$ a zároveň pravděpodobnost jednoho úspěchu $p \rightarrow 0$, přičemž $\nu = Np$ je střední počet úspěšných pokusů, přechází binomické rozdělení limitně v rozdělení Poissonovo a pravděpodobnost, že zaznameneáme právě k úspěchů, je rovna:

$$P(k|N, p) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

Pro odvození pravděpodobnosti $P(k|\nu)$ použijeme tzv. Stirlingův vzorec:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N} = 1,$$

neboli pro $N \rightarrow \infty$:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$$

A dále si napíšeme známou limitu vyjadřující Eulerovo číslo a exponenciální funkci.

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N &= e \\
\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N &= e^x
\end{aligned}$$

$$P(k|N, p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

aproximace: $N \rightarrow \infty$

$$p = \frac{\nu}{N}$$

$$P(k|N, \nu) \approx \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi(N-k)} \left(\frac{N-k}{e}\right)^{N-k} k!} \left(\frac{\nu}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{N-k}$$

$$P(k|N, \nu) \approx \sqrt{\frac{N}{N-k}} \frac{N^N}{(N-k)^{N-k}} \frac{e^{-N}}{e^{-N+k}} \frac{1}{k!} \frac{\nu^k}{N^k} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k}$$

$$P(k|N, \nu) \approx \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k+\frac{1}{2}} e^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k} \left[\frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}\right]$$

$$P(k|N, \nu) \approx \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-N} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{k-\frac{1}{2}} e^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k} \left[\frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}\right]$$

$$\text{limity: } \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-N} \approx \frac{1}{e^{-k}} = e^k$$

$$\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{k-\frac{1}{2}} \approx 1$$

$$\left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{-k} \approx 1$$

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

Normovací podmínka

Při výpočtu použijeme definici normovací podmínky pro diskretní náhodnou proměnnou k a Taylorovu řadu exponenciální funkce.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P(k|\nu)$$

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$1 = e^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}$$

$$1 = e^{-\nu} e^{\nu}$$

Očekávaná hodnota

Při výpočtu použijeme definici očekávané hodnoty $E[k] = \mu$ pro diskretní náhodnou proměnnou k a normovací podmínku.

$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k|\nu)$$

$$E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$E[k] = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu}$$

substituce: $m = k - 1$

$$E[k] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu \cdot \nu^m}{m!} e^{-\nu}$$

$$E[k] = \nu \sum_{m=0}^{\infty} P(m|\nu)$$

$$E[k] = \nu$$

Rozptyl

Při výpočtu použijeme vzorec pro výpočet rozptylu $V[k] = \sigma^2$ pro diskrétní náhodnou proměnnou k pomocí očekávaných hodnot $E[k^2]$ a $E[k]$ a normovací podmínku.

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k|\nu)$$

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$

$$E[k^2] = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} [1 + (k-1)] \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu}$$

$$E[k^2] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-1)!} e^{-\nu} + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\nu^k}{(k-2)!} e^{-\nu}$$

substituce: $m = k - 1$

$$l = k - 2$$

$$E[k^2] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\nu \cdot \nu^m}{m!} e^{-\nu} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\nu^2 \cdot \nu^l}{l!} e^{-\nu}$$

$$E[k^2] = \nu \sum_{m=0}^{\infty} P(m|\nu) + \nu^2 \sum_{l=0}^{\infty} P(l|\nu)$$

$$E[k^2] = \nu + \nu^2$$

$$V[k] = E[k^2] - (E[k])^2$$

$$V[k] = \nu + \nu^2 - \nu^2$$

$$V[k] = \nu$$