

Řešení seminárních úloh 9

1. Kovový vzorek má tvar disku. Měřením byl zjištěn průměr vzorku $d = (10.15 \pm 0.05)$ mm, tloušťka vzorku $t = (0.481 \pm 0.002)$ mm a hmotnost vzorku $m = (440 \pm 1)$ mg. Určete hustotu vzorku a její absolutní a relativní chybu. Odhadněte, o jaký materiál by se mohlo jednat.

Řešení:

Hustotu vzorku vypočítáme jako poměr jeho hmotnosti a objemu.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{1}{4}\pi d^2 t} = \frac{4m}{\pi d^2 t}$$

Po dosazení naměřených hodnot dostáváme $\rho = 11.305 \text{ g cm}^{-3}$.

Chybu hustoty spočítáme metodou přenosu chyb (pro nezávislé proměnné).

$$\sigma_\rho^2 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2$$

Protože se jedná o součin a podíl jednotlivých proměnných, platí pro jednotlivé hustoty:

$$\frac{\sigma_\rho^2}{\rho^2} = \frac{\sigma_m^2}{m^2} + \frac{4\sigma_d^2}{d^2} + \frac{\sigma_t^2}{t^2},$$

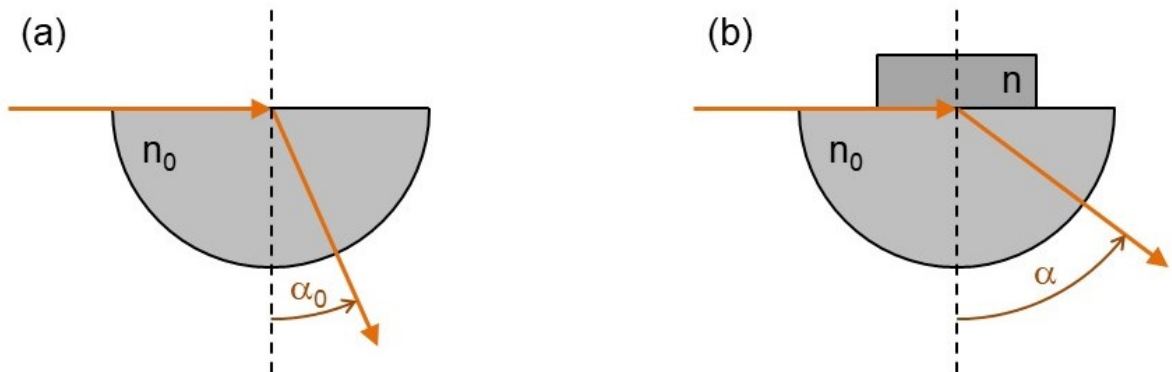
což si můžeme jednoduše ověřit výpočtem.

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^2 &= \left(\frac{4}{\pi d^2 t} \sigma_m\right)^2 + \left(-2\frac{4m}{\pi d^3 t} \sigma_d\right)^2 + \left(-\frac{4m}{\pi d^2 t^2} \sigma_t\right)^2 \\ \sigma_\rho^2 &= \left(\frac{4m}{\pi d^2 t} \frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{4m}{\pi d^2 t} \frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{4m}{\pi d^2 t} \frac{\sigma_t}{t}\right)^2 \\ \sigma_\rho^2 &= \rho^2 \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 4\rho^2 \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2\end{aligned}$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme $\sigma_\rho = 0.12 \text{ g cm}^{-3}$ a $\eta_\rho = \sigma_\rho/\rho = 0.011$. Hodnota hustoty získaná měřením je tedy $\rho = (11.3 \pm 0.1) \text{ g cm}^{-3}$. Relativní chyba je 1.1%. Může se tedy jednat o olovo, jehož hustota je $\rho_{\text{Pb}} = 11.3 \text{ g cm}^{-3}$.

2. Index lomu skla lze měřit pomocí Abbeova polokulového refraktometru užitím monochromatického světla sodíkové výbojky o vlnové délce $\lambda = 589.6 \text{ nm}$. Princip měření je znázorněn na obrázku. Nejdříve změříme index lomu n_0 skleněné polokoule (obr. a) změřením maximálního úhlu lomu α_0 , tj. úhlu lomu paprsku s úhlem dopadu 90° . Následně se na polokouli umístí měřený vzorek, jehož index lomu n chceme zjistit, a provede se opět měření maximálního úhlu lomu α (obr. b).

Naměřeny byly následující úhly $\alpha_0 = 36^\circ 10'$ a $\alpha = 59^\circ 50'$. Chyba měření úhlu činila $\sigma_\alpha = 10'$. Určete index lomu n_0 polokoule a index lomu n měřeného vzorku pro použitou vlnovou délku. V obou případech vypočítejte absolutní a relativní chybu indexu lomu. Odhadněte, za jakého druhu skla byl vyroben měřený vzorek.



Řešení:

Snellův zákon lomu pro přechod světla z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí o indexu lomu n_2 je dán ve tvaru:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

V prvním uspořádání ($n_1 = 1$, $n_2 = n_0$) platí:

$$\begin{aligned} 1 &= n_0 \sin \alpha_0 \\ \Rightarrow n_0 &= \frac{1}{\sin \alpha_0} \\ n_0 &= 1.6945. \end{aligned}$$

Ve druhém uspořádání ($n_1 = n$, $n_2 = n_0$) platí:

$$\begin{aligned} n &= n_0 \sin \alpha \\ \Rightarrow n &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \\ n &= 1.4650. \end{aligned}$$

Pro další výpočet je nutné si převést úhly a jejich chyby na radiány.

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 36^\circ 10' = 0.6312 \text{ rad} \\ \alpha &= 59^\circ 50' = 1.0443 \text{ rad} \\ \sigma_{\alpha_0} &= 10' = 0.0029 \text{ rad} \\ \sigma_\alpha &= 10' = 0.0029 \text{ rad}\end{aligned}$$

Chybu σ_{n_0} vypočítáme metodou přenosu chyb.

$$\begin{aligned}\sigma_{n_0}^2 &= \left(\frac{dn_0}{d\alpha_0} \right)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 = \left| \frac{dn_0}{d\alpha_0} \right| \sigma_{\alpha_0} \\ \sigma_{n_0} &= \frac{\cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0} \sigma_{\alpha_0} \\ \sigma_{n_0} &= 0.0067\end{aligned}$$

Podobně vypočítáme chybu σ_n .

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &= \left(\frac{dn}{d\alpha} \right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{dn}{d\alpha_0} \right)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 \\ \sigma_n &= \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_0} \right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha_0}{\sin^2 \alpha_0} \right)^2 \sigma_{\alpha_0}^2 \\ \sigma_n &= 0.0063\end{aligned}$$

Po zaokrouhlení chyb na 1 platnou číslici jsou výsledky $n_0 = 1.695 \pm 0.007$ a $n = 1.465 \pm 0.006$ s relativními chybami $\eta_{n_0} = 0.4\%$ a $\eta_n = 0.4\%$. Vzorek je patrně vyroben ze skla SIMAX, které má index lomu $n = 1.472$ pro vlnovou délku $\lambda = 589.6 \text{ nm}$.