Řešení seminárních úloh 6

1. Měření náhodné proměnné x, která je výběrem z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a standardní odchylkou σ, opakujeme celkem 20krát. Jaká je pravděpodobnost, že více než 2/3 naměřených hodnot bude ležet v intervalu $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$, tj. intervalu jedné standardní odchylky vzhledem k očekávané hodnotě?

Řešení:
Označme pravděpodobnost, že náhodná proměnná x bude ležet v intervalu jedné standardní odchylky (úspěch) jako p.

$$p \equiv P\left[x \in (\mu-\sigma, \mu+\sigma)\right] = F(\mu+\sigma|\mu,\sigma) - F(\mu-\sigma|\mu,\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \doteq 0.683$$

Pravděpodobnost, že z N pokusů bude právě k úspěšných je dána binomickým rozdělením $P(k|N,p)$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$
$$P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}$$

Případu, kdy více než 2/3 naměřených hodnot leží v intervalu jedné standardní odchylky, odpovídá 14 a více úspěšných pokusů. Výsledná pravděpodobnost je tedy:

$$P(k>13) = \sum_{k=14}^{20} P(k|20, 0.683)$$
$$P(k>13) = \sum_{k=14}^{20} \frac{20!}{(20-k)!k!}\ 0.683^k\ 0.317^{20-k}$$
$$P(k>13) \doteq 0.543 = 54.3\%.$$

2. Náhodná proměnná t má exponenciální rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

(a) Ověřte, že funkce $f(x)$ splňuje normalizační podmínku.
(b) Vypočítejte distribuční funkci $F(x)$ tohoto rozdělení.
(c) Vypočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl.
(d) Jaké hodnoty nabývá distribuční funkce pro $t = \tau$?
(e) Jaká je pravděpodobnost, že $t > \tau$?

Řešení:
(a) Normovací podmínku ověříme spočítáním určitého integrálu.

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

$$1 = 0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

$$1 = \frac{1}{\tau}\left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{\infty}$$

$$1 = \frac{1}{\tau}(0+\tau)$$

(b) Distribuční funkce F(t) je nulová pro $t < 0$ a nenulová pro $t \geq 0$:

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

$$F(t) = 0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{t} \exp\left(-\frac{x}{\tau}\right)$$

$$F(t) = \frac{1}{\tau}\left[-\tau\exp\left(-\frac{x}{\tau}\right)\right]_0^{x}$$

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

(c) Očekávaná hodnota $E[t]$:

$$E[t] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tf(t)\mathrm{d}t$$

$$E[t] = 0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\infty} t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

per partes: $u(t) = t$
$\Rightarrow u'(t) = 1$

$$v'(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
$$\Rightarrow v(x) = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$E[t] = \left[-t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$
$$E[t] = 0 + \left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{\infty}$$
$$E[t] = \tau$$
$$\Rightarrow \mu = \tau$$

Rozptyl $V[t]$ spočítáme pomocí momentů $E[t]$ a $E[t^2]$:

$$E\left[t^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$E[t] = 0 + \frac{1}{\tau}\int\limits_{0}^{\infty} t^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

per partes: $u(t) = t^2$
$\Rightarrow u'(t) = 2$

$$v'(t) = \frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
$$\Rightarrow v(x) = -\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$E[t] = \left[-t^2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} 2t\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

per partes: $\tilde{u}(t) = 2t$

$$\Rightarrow \tilde{u}'(t) = t$$

$$\tilde{v}'(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{v}(x) = -\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$E[t] = 0 + \left[-2t\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^\infty + 2\tau\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

$$E[t] = 0 + 0 + 2\tau\left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^\infty$$

$$E[t] = 2\tau^2$$

$$V[t] = E[t^2] - (E[t])^2$$

$$V[t] = 2\tau^2 - \tau^2$$

$$V[t] = \tau^2$$

$$\Rightarrow \sigma = \tau$$

(d) Hodnota distribuční funkce v bodě $t = \tau$ je rovna:

$$F(\tau) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau}\right) = 1 - e^{-1}$$

a udává pravděpodobnost, že náhodná proměnná t leží v intervalu $[0, \tau]$.

(e) Doplňkem k této pravděpodobnosti je pravděpodobnost, že náhodná proměnná $t > \tau$.

$$P\left(t > \tau\right) = 1 - P\left(t \in [0, \tau]\right) = 1 - F(\tau) = e^{-1} \doteq 0.368 = 36.8\%$$