Řešení seminárních úloh 5

1. Diskrétní náhodná proměnná k může nabývat hodnot všech přirozených čísel (včetně nuly) a má rozdělení popsané posloupností pravděpodobností P_k.

$$P_k = \frac{1}{ek!}$$

Vypočítejte střední hodnotu μ a standardní odchylku σ náhodné proměnné k. Jaká je pravděpodobnost, že $k > 4$?

Řešení:
Ověřme, že pravděpodobnosti P_k splňují normalizační podmínku.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ek!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} e = 1$$

Poslední sumu jsme sečetli pomocí jedné z definic Eulerova čísla e. Tuto identitu využijeme i v následujících výpočtech.

Střední hodnota je:

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{ek!} = 0 + \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{e} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{e} e = 1,$$

kde jsme použili substituci pro sčítací index $m \equiv k - 1$.

Pro výpočet rozptylu použijeme vztah:

$$V[k] = E[k^2] - (E[k])^2$$
$$\sigma^2 = E[k^2] - \mu^2$$

Počítáme tedy $E[k^2]$:

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{ek!} = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{(k-1)!} = \frac{1}{e} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

$$E[k^2] = \frac{1}{e} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \right) = \frac{1}{e} 2e = 2,$$

kde jsme použili substituci pro sčítací indexy $n \equiv k - 2$ a $m \equiv k - 1$.
Standardní odchylka σ je tedy:

$$\sigma = \sqrt{E[k^2] - \mu^2} = 1.$$

Pravděpodobnost $P(k > 4)$ je rovna doplňku k pravděpodobnostem P_0, P_1, P_2, P_3 a P_4.

$$P(k > 4) = 1 - (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) \approx 0.0037$$

2. Pozitron je antičásticí elektronu. Pokud se setká elektron a pozitron, dojde k anihilaci a obě částice se změní na záření. Nejčastěji (v 99.27% případů) dojde k přeměně anihilujícího páru elektron-pozitron na dva fotony. Zbylé vzácné případy odpovídají tří-(a více-)fotonové anihilaci. Kolik opakovaných měření pozitronové anihilace je nutné provést, aby pravděpodobnost, že v naměřené sadě dat bude alespoň jedna tří-fotonová anihilace, byla 0.99?

Řešení:
Pravděpodobnost tří-fotonové anihilace je $p = 1 - 0.9927 = 0.0073$. Pravděpodobnost, že v naměřené sadě N dat bude k tří-fotonových anihilací, je dána binomickým rozdělením.

$$P(k|N,p) = \frac{N!}{(N-k)!k!}p^k(1-p)^k$$

Hledaná pravděpodobnost $P = 0.99$ je doplňkem k pravděpodobnosti $P(0|N,p)$, že v naměřené sadě nebude žádná tří-fotonová anihilace. Tedy:

$$\begin{aligned} P &= 1 - P(0|N,p) \\ 0.99 &= 1 - (1-p)^N \\ N &= \frac{\ln 0.01}{\ln(1-p)} = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.9927} \approx 629 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že detekce tří-fotonové anihilace je poměrně vzácná záležitost, můžeme úlohu vyřešit **přibližně** i pomocí Poissonova rozdělení. Pravděpodobnost, že v naměřené sadě dat bude k tří-fotonových anihilací, je:

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}$$

Předchozí výpočet přepíšeme jako:

$$\begin{aligned} P &= 1 - P(0|\nu) \\ 0.99 &= 1 - e^{-\nu} \\ \nu &= \ln 100 \approx 4.6 \end{aligned}$$

Parametr ν je střední hodnota naměřených tří-fotonových anihilací $\nu = \mu = Np$. Počet měření N je tedy:

$$N = \frac{\nu}{p} = \frac{\ln 100}{0.0073} \approx 631$$