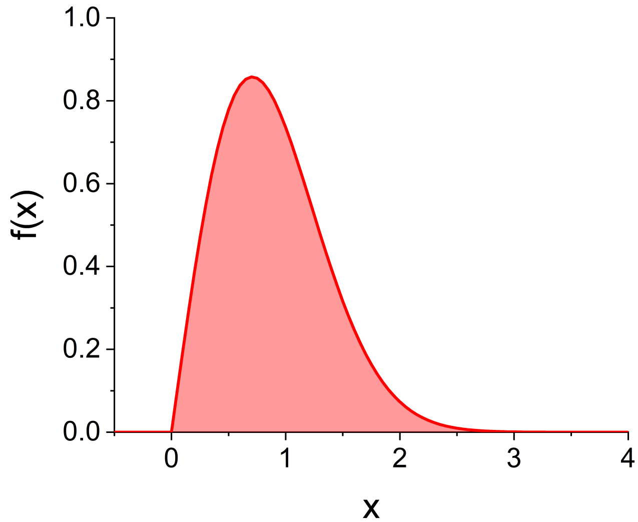
Řešení seminárních úloh 4

1. Náhodná proměnná x má rozdělení popsané hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

Vypočítejte medián této náhodné proměnné. Pozn.: medián je taková hodnota x_m, pro kterou je distribuční funkce $F(x_m) = \frac{1}{2}$.

Řešení:



Ověřme, že hustota pravděpodobnosti $f(x)$ splňuje normalizační podmínku.

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \left[-e^{-x^2}\right]_0^\infty = 1$$

Distribuční funkce $F(x)$ je definována jako:

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^x 2te^{-t^2}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t^2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2}$$

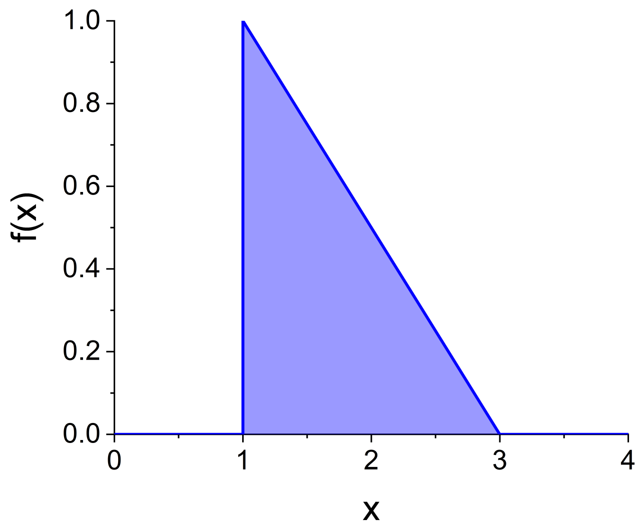
Pro medián x_m platí:

$$\begin{aligned} F(x_m) &= \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-x_m^2} &= \frac{1}{2} \\ e^{-x_m^2} &= \frac{1}{2} \\ -x_m^2 &= -\ln 2 \\ x_m &= \sqrt{\ln 2} \end{aligned}$$

2. Vypočítejte očekávanou hodnotu a rozptyl rozdělení náhodné proměnné x popsané hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3-x) & \text{pro } x \in [1,3] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Řešení:



Ověřme, že hustota pravděpodobnosti $f(x)$ splňuje normalizační podmínku.

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}(3-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$$

Střední (očekávaná) hodnota je definována jako:

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_1^3 x f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}(3x - x^2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{2} - 9 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Rozptyl počítejme podle vztahu $V[x] = E[x^2] - (E[x])^2$:

$$\begin{aligned} E[x^2] &= \int_1^3 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2}(3x^2 - x^3)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(27 - \frac{81}{4} - 1 + \frac{1}{4}\right) = 3 \end{aligned}$$

$$V[x] = 3 - \frac{25}{9} = \frac{2}{9} \Rightarrow \sigma = \sqrt{V[x]} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47$$