Řešení seminárních úloh 3

1. Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení, popisující např. dobu života částice nebo kvantového stavu, je exponenciálně klesající funkce. Parametrem rozdělení je střední doba života τ.
Napište hustotu pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení.
Vypočítejte distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
V programu Gnuplot nakreslete grafy obou funkcí.

Řešení:
Doba života je nezáporná veličina, proto pro $x < 0$ platí:

$$f(x) = 0.$$

Pro kladné hodnoty $x \geq 0$ pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné v okolí bodu x exponenciálně klesá s rostoucím x. Tedy:

$$f(x) = Ke^{-\frac{x}{\tau}},$$

kde K je konstanta, kterou musíme zjistit z normalizační podmínky.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv 0$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= K\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\tau}}\,\mathrm{d}x\\ &= K\left[-\tau e^{-\frac{x}{\tau}}\right]_0^{\infty} = K\tau = 1\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že konstanta K musí být $K = \frac{1}{\tau}$ a hustota pravděpodobnosti je tedy:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Distribuční funkce je definována jako:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro záporné hodnoty $x < 0$ je nulová.

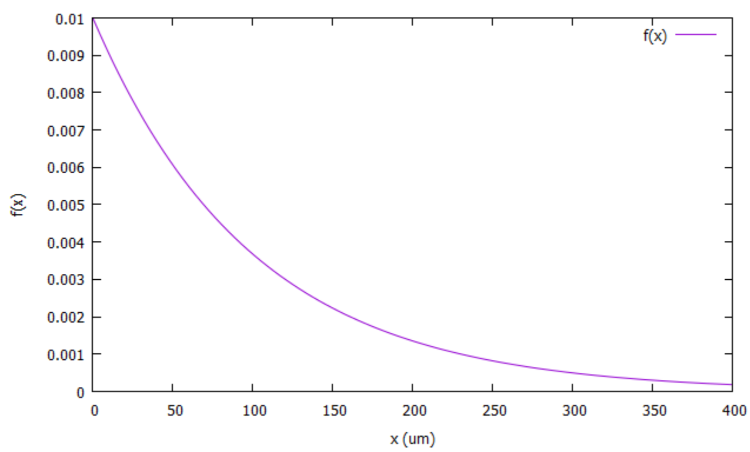
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

Pro kladné hodnoty $x \geq 0$ je rovna:

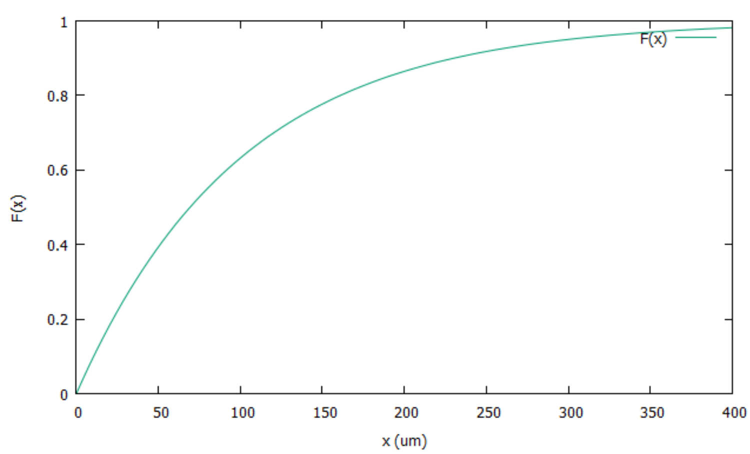
$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \ \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \ \mathrm{d}t, \\
F(x) &= 0 + \left[-e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^x, \\
F(x) &= 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}.
\end{aligned}
$$

Distribuční funkce exponenciálního rozdělení je tedy:

$$
F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\tau}} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \tag{2}
$$



Obrázek 1: Hustota pravděpodobnosti pro exponenciální rozdělení s dobou života $\tau = 100$ μs



Obrázek 2: Distribuční funkce pro exponenciální rozdělení s dobou života $\tau = 100$ μs

2. Matematické kyvadlo o délce závěsu l a hmotnosti m vychýlíme o malý úhel tak, že jeho x-ová souřadnice je x_0, pustíme ho a necháme kývat. Během kývání ho v náhodně vybraných časech fotografujeme. Z fotografií potom uděláme histogram poloh kyvadla, tj. jeho x-ové souřadnice.
Jaký tvar bude tento histogram mít?
Jinými slovy jaká je hustota pravděpodobnosti $f(x)$ náhodné proměnné x?

Nápověda: Pravděpodobnost, že je kyvadlo v dané poloze, je nepřímo úměrná rychlosti kyvadla.

Řešení:
Polohu $x(t)$ konce matematického kyvadla popíšeme rovnicí:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)\,, \tag{3}$$

kde úhlová frekvence kmitů $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Rychlost kyvadla získáme derivací předchozího vztahu podle času t:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -x_0 \omega \sin(\omega t)\,. \tag{4}$$

Využijme skutečnosti, že hustota pravděpodobnosti, že je kyvadlo v okolí polohy x, je nepřímo úměrná velikosti rychlosti kyvadla v.

$$f(x) \propto \frac{1}{|v|}$$

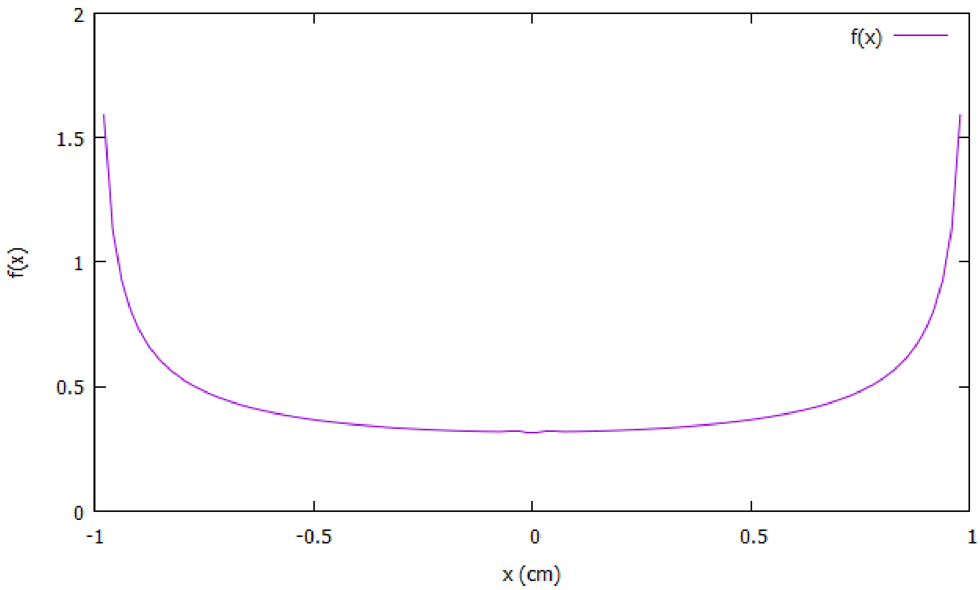
Nyní je potřeba za využití rovnic (3) a (4) vyloučit parametr t, tj. vyjádřit rychlost v jako funkci polohy x.

$$\begin{aligned}
\cos(\omega t) &= \frac{x}{x_0} \\
v(t) &= -x_0 \omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} \\
v(x) &= -x_0 \omega \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}
\end{aligned}$$

Histogram poloh kyvadla $x \in [-x_0, x_0]$ má tedy stejný tvar jako hustota pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}.$$

Na obrázku 3 vidíme, že pravděpodobnost, že vyfotíme kyvadlo v dané poloze je nejvyšší v krajní bodech a naopak nejnižší uprostřed v okolí rovnovážné polohy.



Obrázek 3: Hustota pravděpodobnosti poloh matematického kyvadla pro maximální výchylku $x_0 = 1$ cm

Neznámou konstantu A získáme z normovací podmínky.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} \frac{A}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}\ \mathrm{d}x = \left[A x_0 \arcsin\frac{x}{x_0}\right]_{-x_0}^{x_0} = A x_0 \pi = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\pi x_0}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \tag{5}$$