

Řešení seminárních úloh 2

1. Odpor cínového drátu s kruhovým průřezem o délce 1 m a tloušťce 0.2 mm měříme přímou metodou. K dispozici máme zdroj stejnosměrného napětí, které lze spojitě měnit v intervalu 0-30 V, dále ampérmetr třídy přesnosti 1 o rozsazích 0-1 A a 0-10 A a voltmetr třídy přesnosti 1.5 o rozsazích 0-1 V, 0-10 V a 0-100 V. Nakreslete nejvhodnější zapojení a vypočítejte, jaká je nejmenší dosažitelná maximální chyba změřeného odporu drátu. Měrný odpor cínu je $\varrho_{\text{Sn}} = 11 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$

Řešení:

Nejprve zjistíme odpor R samotného drátu:

$$R = \varrho_{\text{Sn}} \frac{4l}{\pi d^2},$$

kde d je tloušťka drátu a l jeho délka. Po dosazení číselných hodnot dostáváme odpor drátu $R = 3.5 \Omega$. Při měření odporu přímou metodou používáme Ohmův zákon:

$$R = \frac{U}{I},$$

jehož maximální relativní chybu vyjádříme jako:

$$\frac{\varepsilon_R}{R} = \left(\frac{\varepsilon_U}{U} + \frac{\varepsilon_I}{I} \right). \quad (1)$$

Označme třídu přesnosti ampérmetru P_A a jeho rozsah R_A a obdobně třídu přesnosti a rozsah voltmetru jako P_V a R_V . Potom je maximální absolutní chyba odporu měřeného těmito přístroji rovna:

$$\varepsilon_R = \frac{R}{100} \left(\frac{P_V R_V}{U} + \frac{P_A R_A}{I} \right). \quad (2)$$

Nyní proberme jednotlivé možnosti:

1. Měříme na citlivějším rozsahu ampérmetru $R_A = 1 \text{ A}$ a zvolíme takový proud, abychom mohli použít nejcitlivější rozsah voltmetru $R_V = 1 \text{ V}$. Nejvyššímu možnému napětí 1 V odpovídá proud 0.29 A. Z rovnice (2) dostáváme $\varepsilon_R = 0.17 \Omega$.
2. Měříme na citlivějším rozsahu ampérmetru $R_A = 1 \text{ A}$ a použijeme střední rozsah voltmetru $R_V = 10 \text{ V}$. Potom nejvyšší možný naměřený proud je 1 A a napětí je 3.5 V. Z rovnice (2) dostáváme $\varepsilon_R = 0.19 \Omega$.
3. Měříme na hrubším rozsahu ampérmetru $R_A = 10 \text{ A}$ a na středním rozsahu voltmetru $R_V = 10 \text{ V}$. Maximálnímu napětí 10 V odpovídá proud 2.9 A. Z rovnice (2) dostáváme $\varepsilon_R = 0.17 \Omega$.
4. Měříme na hrubším rozsahu ampérmetru $R_A = 10 \text{ A}$ a nejhrubším rozsahu voltmetru $R_V = 100 \text{ V}$. Pak využijeme maximální napětí zdroje 30 V a proud bude 8.6 A. Z rovnice (2) dostáváme $\varepsilon_R = 0.22 \Omega$.

Nejmenší dosažitelná hodnota maximální chyby odporu je $\varepsilon_R = 0.17 \Omega$ a dosáhneme jí v případě 1. a 3.

2. Neutrina produkovaná urychlovačem SPS v CERNu se registrují podzemním detektorem OPERA v laboratoři Gran Sasso vzdálené přibližně 730 km. Maximální chyba stanovení času vzniku a času detekce neutrina je 10 ns. Jak přesně je nutné znát vzdálenost mezi urychlovačem SPS a detektorem OPERA, aby bylo možné spolehlivě detekovat (hypotetické) překročení rychlosti světla ve vakuu ($c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$) o tisícinu procenta?

Řešení:

Rychlost neutrin c spočítáme jako:

$$c = \frac{l}{\Delta t},$$

kde $l = 730 \text{ km}$ a $\Delta t = t_d - t_e$ je rozdíl času emise t_e a detekce t_d neutrina. Maximální relativní chyba určení rychlosti je:

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_{\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_l}{l}. \quad (3)$$

Předpokládáme, že maximální chyba určení času emise a detekce neutrina je stejná, $\varepsilon_{t_e} = \varepsilon_{t_d} = \varepsilon_t = 10 \text{ ns}$. Potom maximální chyba určení délky časového intervalu Δt je $\varepsilon_{\Delta t} = 2\varepsilon_t$ a rovnici (3) můžeme dále upravit a vyjádřit z ní maximální absolutní chybu vzdálenosti ε_l .

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_c}{c} &= \frac{2\varepsilon_t}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_l}{l} \\ \frac{\varepsilon_c}{c} &= \frac{2\varepsilon_t}{l}c + \frac{\varepsilon_l}{l} \\ \varepsilon_l &= l\eta_c - 2\varepsilon_t c \end{aligned} \quad (4)$$

Po dosazení číselných hodnot a maximální relativní chyby $\eta_c = 10^{-5}$, dostáváme $\varepsilon_l = 1.3 \text{ m}$. Tedy maximální chyba určení vzdálenosti musí být 1.3 m nebo menší.