Řešení seminárních úloh 10

1. V experimentu bylo naměřeno 10 hodnot náhodné proměnné x: 10.5, 5.5, 11.2, 13.1, 9.0, 4.4, 6.9, 14.9, 6.2. Předpokládáme, že náhodná proměnná x má rovnoměrné rozdělení na intervalu (a, b).
Pomocí metody maximální věrohodnosti vypočítejte odhady parametrů $\hat{a}$, $\hat{b}$ tohoto rozdělení, odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu}$ a odhad standardní odchylky $\hat{\sigma}$ této náhodné proměnné.

Řešení:
Náhodná proměnná x je výběrem z rovnoměrného rozdělení $U(a, b)$ s hustotou pravděpodobnosti $f(x|a, b)$.

$$f(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a,b] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věrohodnostní funkce je tedy:

$$L(a,b) = \frac{1}{(b-a)^n},$$

která nabývá maximálních hodnot pro co nejužší interval $[a, b]$. Protože všechny naměřené hodnoty musí ležet v tomto intervalu, musí platit $a \leq x_{max}$ a $b \geq x_{max}$. Maximální možnou hodnotu věrohodnostní funkce dosáhneme pro:

$$\hat{a} = x_{min} = 4.4$$
$$\hat{b} = x_{max} = 14.9$$

Očekávaná hodnota μ a standardní odchylka σ rovnoměrného rozdělení jsou dány jako:

$$\mu = \frac{a+b}{2},$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}},$$

jejich odhady $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$ určíme dosazením odhadovaných parametrů $\hat{a}$ a $\hat{b}$.

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{a}+\hat{b}}{2} \doteq 9.7$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}} \doteq 3$$

2. Při měření aktivity radioaktivního zářiče byl měřen počet rozpadů za 1 min. Bylo provedeno 20 měření a získány následující počty (detekovaných) rozpadů: 39601, 39795, 39424, 39997, 39683,39740, 39589, 39710, 39607, 39761, 39650, 39484, 39469, 39911, 39445, 39147, 39931, 39442, 39307, 39308.
Pomocí metody maximální věrohodnosti nalezněte odhad aktivity zářiče (tj. počet rozpadů za sekundu). Účinnost detekce záření uvažujte 30%.

Řešení:
Počet detekovaných rozpadů k zářiče za 1 min je náhodná proměnná s Poissonovým rozdělením.

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k e^{-\nu}}{k!}$$

Věrohodnostní funkce $L(\nu|\boldsymbol{k})$ a její logaritmus jsou tedy:

$$L(\nu|\boldsymbol{k}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\nu^{k_i} e^{-\nu}}{k_i!},$$
$$\ln L(\nu|\boldsymbol{k}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \ln \nu - n\nu - \sum_{i=1}^{n} \ln k_i!.$$

Hledáme takový odhad parametru $\hat{\nu}$, pro který věrohodnostní funkce resp. její logaritmus nabývá maxima.

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\nu} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\nu} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\hat{\nu}} - n = 0$$
$$\Rightarrow \hat{\nu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$$

Průměrný počet detekovaných rozpadů za 1 min tedy můžeme odhadnout jako aritmetický průměr naměřených hodnot.

$$\hat{\nu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = 39\,600 \text{ min}^{-1}$$

Aktivita zářiče, tj. počet rozpadů za 1 s, je tedy:

$$\hat{A} = \frac{[\hat{\nu}]}{60 \cdot 0.3} \text{ s}^{-1} = 2200 \text{ s}^{-1} = 2200 \text{ Bq}$$

3. Při opakovaném měření hmotnosti vzorku bylo získáno následujících 6 hodnot: 12.1 mg, 12.8 mg, 12.6 mg, 12.3 mg, 12.4 mg, 12.8 mg.
Předpokládáme, že měřená náhodná proměnná má normální rozdělení. Pomocí metody maximální věrohodnosti nalezněte odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu}_m$, odhad chyby $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_m}$ odhadu očekávané hodnoty a odhad chyby jednoho měření $\hat{\sigma}_m$. Jaká je pravděpodobnost, že při jednom měření naměříme hmotnost větší než 13 mg?

Řešení:
Pro náhodné proměnné x_i, které jsou výběrem z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma)$, jsou věrohodnostní funkce a její logaritmus dány jako:

$$L(\mu, \sigma|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$\ln L(\mu, \sigma|\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} - n \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right).$$

Hledáme takové odhady parametrů $\hat{\mu}$ a $\hat{\sigma}$, pro které věrohodnostní funkce resp. její logaritmus nabývá maxima.

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\mu} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\mu} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \hat{\mu}}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\sigma} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\hat{\sigma}} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Odhad $\hat{\sigma}_0$ je předpojatý, tzn. podhodnocuje skutečnou chybu σ. Korigovaný odhad $\hat{\sigma}_1$ je nepředpojatý, tzn. ani nepodhodnocuje ani nepřehodnocuje skutečnou chybu σ.

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu})^2}$$

Pro konkrétní naměřené hodnoty dostaneme odhad očekávané hodnoty hmotnosti $\hat{\mu}_m$ a odhad chyby 1 měření hmotnosti $\hat{\sigma}_m$ jako:

$$\hat{\mu}_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = 12.50 \text{ mg},$$

$$\hat{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (m_i - \hat{\mu}_m)^2} = 0.28 \text{ mg}.$$

Chybu odhadu $\hat{\mu}_m$ odhadneme jako chybu aritmetického průměru.

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_m} = \frac{\hat{\sigma}_m}{\sqrt{n}} = 0.12 \text{ mg}$$

Výsledek měření tedy zapíšeme jako $m = (12.5 \pm 0.1)$ mg.

Pravděpodobnost, že naměříme hodnotu větší než $m_0 = 13$ mg (výsledek 1 měření) je dána doplňkem k distribuční funkci normálního rozdělení.

$$\begin{aligned}
P\left(m > m_0\right) &= 1 - F(m_0|\hat{\mu}, \hat{\sigma}_m) \\
P\left(m > m_0\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{m_0 - \hat{\mu}}{\sqrt{2}\hat{\sigma}_m}\right)\right] \\
P\left(m > m_0\right) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{13 - 12.5}{0.28\sqrt{2}}\right) \\
P\left(m > m_0\right) &\doteq 3.7\%
\end{aligned}$$