

2. zápočtový test (45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

6. ledna 2026

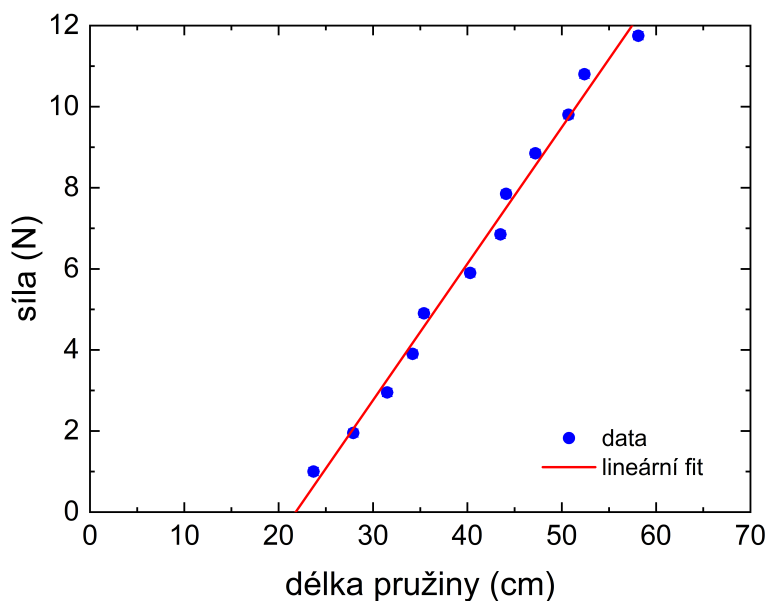
Příklad 1a - lineární regrese

Zadání:

V experimentu byla změřena závislost síly, napínající pružinu, na její délce, viz graf na obrázku. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí **lineární vztah**:

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde k je tuhost pružiny, $\Delta y = y - y_0$ je prodloužení pružiny v důsledku působení síly F , y je délka prodloužené pružiny a y_0 je délka nezatížené pružiny.



Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí $\lambda(x) = ax + b$ s následujícími parametry: $a = 0.3365$, $\sigma_a = 0.0108$, $b = -7.3373$, $\sigma_b = 0.4542$, $\text{cov}(a, b) = -0.00477$.

Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu.

Poznámky k řešení:

- (a) Jaké jsou jednotky parametrů a , σ_a , b , σ_b a $\text{cov}(a, b)$?
- (b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k , délkou nezatížené pružiny y_0 a naitovanými parametry a , b ? Pro výpočet chyb k a y_0 použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.
- (c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou SI!

(10 bodů)

Řešení:

Označme si sílu jako F a délku pružiny jako y . Závislost $F(y)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $F = a \cdot y + b$. Z obrázku vidíme, že jednotkou síly je $[F] = \text{N}$, zatímco jednotkou délky je $[y] = \text{cm}$. Parametr a tudíž musí mít jednotku $[a] = \text{N cm}^{-1}$ a parametr b jednotku $[b] = \text{N}$. Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů σ_a a σ_b . Kovariance $\text{cov}(a, b)$ má stejnou jednotku jako součin chyb $\sigma_a \sigma_b$, tj. $[\text{cov}(a, b)] = \text{N}^2 \text{cm}^{-1}$.

Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$\begin{aligned} F &= k(y - y_0) \\ F &= ky - ky_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnici $a = k$ a konstantním členem $b = -ky_0$. Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny k a její délku v nenapjatém stavu y_0 .

$$k = a \quad (2)$$

$$k = 0.3365 \text{ N cm}^{-1} = 33.65 \text{ N m}^{-1}$$

$$y_0 = -\frac{b}{a} \quad (3)$$

$$y_0 = 21.805 \text{ cm} = 0.21805 \text{ m}$$

Chyba tuhosti σ_k se přímo rovná chybě σ_a parametru a . Musíme si dát jen pozor na jednotku a zaokrouhlit výslednou chybu na 1 platnou číslici.

$$\sigma_k = \sigma_a \quad (4)$$

$$\sigma_k = 0.0108 \text{ N cm}^{-1} = 1.08 \text{ N m}^{-1} \doteq 1 \text{ N m}^{-1}$$

Chybu délky σ_{y_0} získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (3).

$$\begin{aligned} \sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{\partial y_0}{\partial a} \sigma_a \right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial b} \sigma_b \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial y_0}{\partial a} \right) \left(\frac{\partial y_0}{\partial b} \right) \text{cov}(a, b) \\ \sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{b}{a^2} \sigma_a \right)^2 + \left(-\frac{1}{a} \sigma_b \right)^2 + 2 \left(\frac{b}{a^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right) \text{cov}(a, b) \\ \sigma_{y_0} &= \sqrt{\left(\frac{b}{a^2} \sigma_a \right)^2 + \left(-\frac{1}{a} \sigma_b \right)^2 - 2 \frac{b}{a^3} \text{cov}(a, b)} \\ \sigma_{y_0} &= 0.7 \text{ cm} = 0.007 \text{ m} \end{aligned} \quad (5)$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru.

$$k = (34 \pm 1) \text{ N m}^{-1}$$

$$\text{případně: } k = (34 \pm 1) \text{ kg s}^{-2}$$

$$y_0 = (21.8 \pm 0.7) \text{ cm}$$

$$\text{případně: } y_0 = (218 \pm 7) \times 10^{-3} \text{ m}$$

Příklad 2a - odhady parametrů

Zadání:

V tabulce je uvedeno 8 změřených hodnot rychlosti proudící kapaliny.

n	v (cm s ⁻¹)
1	3.89
2	3.38
3	7.08
4	3.32
5	4.40
6	1.76
7	5.85
8	3.07

- (a) Vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné v .
- (b) Nakreslete graf hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné v .
- (c) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru!**

(5 bodů)

Řešení:

- (a) Očekávanou hodnotu $\hat{\mu}_v$ odhadneme jako aritmetický průměr naměřených hodnot v_n .

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n \quad (1)$$

$$\bar{v} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 v_n = 4.09375 \text{ cm s}^{-1}$$

Odchylku $\hat{\sigma}_v$ vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

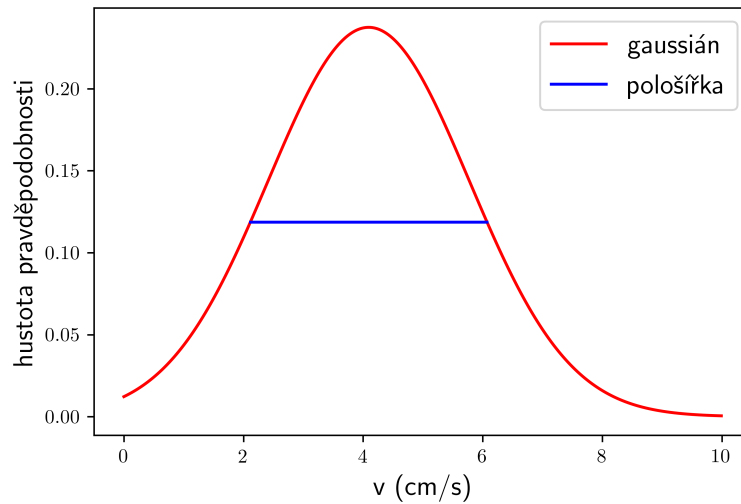
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (v_n - \bar{v})^2} \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{n=1}^8 (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{n=1}^N v_n^2 - N\bar{v}^2 \right)} \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7} \left(\sum_{n=1}^8 v_n^2 - 8\bar{v}^2 \right)} \doteq 1.68 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě jsme implicitně předpokládali, že náhodná proměnná má normální rozdělení $N(\mu_v, \sigma_v)$. Graf hustoty pravděpodobnosti je tedy gaussian s očekávanou hodnotou $\hat{\mu}_v$ a standardní odchylkou $\hat{\sigma}_v$. Postačí nakreslit gaussian centrovaný okolo střední hodnoty 4.1 cm s^{-1} s pološířkou $w = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \doteq 4.0 \text{ cm s}^{-1}$.



(c) Chybu odhadu $\hat{\mu}_v$ určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{8}} \doteq 0.59 \text{ cm s}^{-1} \quad (4)$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny cm s^{-1} a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

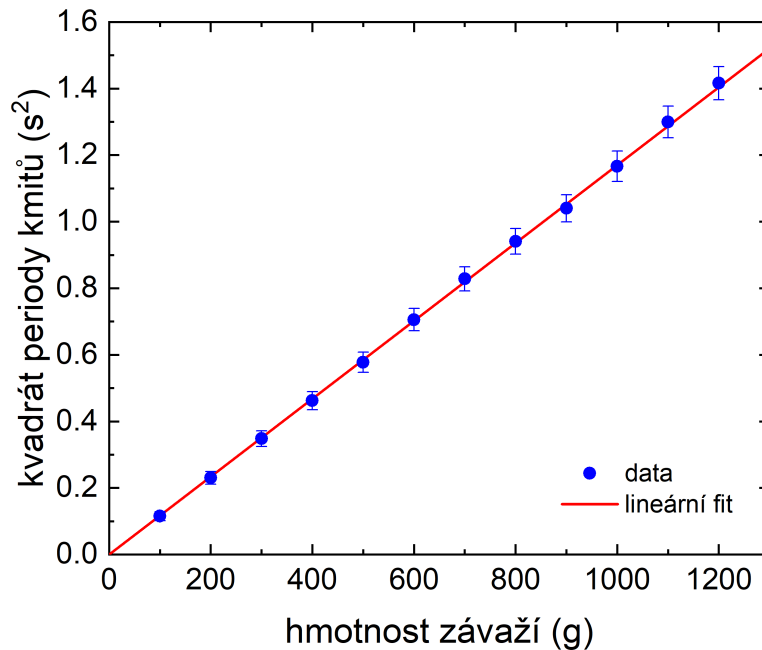
$$\bar{v} = (4.1 \pm 0.6) \text{ cm s}^{-1}$$

Příklad 1b - lineární regrese

V experimentu byla změřena závislost periody kmitů pružiny na hmotnosti závaží zavěšeném na pružině. Pro periodu kmitů pružiny platí vztah:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde m je hmotnost závaží a k je tuhost pružiny. Umocněním této rovnice na druhou dostáváme **lineární vztah** mezi kvadrátem periody a hmotností, viz graf na obrázku.



Naměřená závislost byla proložena přímkou procházející počátkem danou rovnicí $\lambda(x) = ax$ s parametry: $a = 0.00117$, $\sigma_a = 0.000016$.

Vypočítejte tuhost pružiny.

Poznámky k řešení:

- (a) Jaké jsou jednotky parametrů a , σ_a ?
- (b) Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny k a naitovaným parametrem a ? Pro výpočet chyby k použijte tento vztah a metodu přenosu chyb.
- (c) Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou SI!

(5 bodů)

Řešení:

Označme si periodu kmitů jako T a hmotnost závaží jako m . Závislost $T^2(m)$ jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem $T^2 = am$. Z obrázku vidíme, že jednotkou kvadrátu periody je $[T^2] = \text{s}^2$, zatímco jednotkou hmotnosti je $[m] = \text{g}$. Parametr a tudíž musí mít jednotku $[a] = \text{s}^2 \text{g}^{-1}$, totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chybu σ_a .

Linearizaci závislosti periody na hmotnosti pružiny provedeme následovně.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ T^2 &= \frac{4\pi^2}{k}m \end{aligned} \tag{1}$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci procházející počátkem a se směrnici $a = 4\pi^2/k$. Dosazením do tohoto vztahu vypočítáme tuhost pružiny k .

$$k = \frac{4\pi^2}{a} \tag{2}$$

$$k = 33742 \text{ g s}^{-2} = 33.742 \text{ kg s}^{-2} \tag{3}$$

Chybu tuhosti σ_k získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (2).

$$\begin{aligned} \sigma_k^2 &= \left(\frac{\partial k}{\partial a} \sigma_a \right)^2 \\ \sigma_k &= \frac{4\pi^2}{a^2} \sigma_a \\ \sigma_k &= 461 \text{ g s}^{-2} = 0.461 \text{ kg s}^{-2} \doteq 0.5 \text{ kg s}^{-2} \end{aligned} \tag{4}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s chybami zaokrouhlenými na 1 platnou číslici a středními hodnotami zaokrouhlenými na stejný řád platné číslice jako příslušné chyby.

$$k = (33.7 \pm 0.5) \text{ kg s}^{-2}$$

Příklad 2b - odhady parametrů

Zadání:

V tabulce je uvedeno 12 hodnot rychlosti proudící kapaliny změřených učitelem a 5 hodnot rychlosti proudící kapaliny následně změřených studentem.

n_1	v (cm s ⁻¹)	n_2	v (cm s ⁻¹)
1	5.34	1	8.17
2	4.87	2	3.19
3	6.24	3	6.01
4	3.81	4	4.39
5	6.17	5	6.37
6	5.52		
7	5.33		
8	4.80		
9	7.09		
10	4.39		
11	5.84		
12	4.98		

- (a) Na základě měření provedeného učitelem vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty μ a standardní odchylky σ náhodné proměnné v .
- (b) Definujte konfidenční interval hodnot $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ neboli tzv. 3σ kritérium.
- (c) Otestujte, zda není žádná z hodnot naměřených studentem zatížená hrubou chybou.
- (d) Na základě všech spolehlivě naměřených hodnot (učitelem i studentem) vypočítejte nový nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné v .
- (e) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru!**

(10 bodů)

Řešení:

- (a) Očekávanou hodnotu $\hat{\mu}_v$ odhadneme jako aritmetický průměr hodnot v_n naměřených učitelem.

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n \quad (1)$$
$$\bar{v} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{12} v_n = 5.365 \text{ cm s}^{-1}$$

Odchylku $\hat{\sigma}_v$ vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (v_n - \bar{v})^2} \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11} \sum_{n=1}^{12} (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\sum_{n=1}^N v_n^2 - N\bar{v}^2 \right)} \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11} \left(\sum_{n=1}^{12} v_n^2 - 12\bar{v}^2 \right)} \doteq 0.89 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná má normální rozdělení $N(\mu_v, \sigma_v)$. Konfidenční interval $(\hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v, \hat{\mu}_v + 3\hat{\sigma}_v)$ definující 3σ kritérium má následující hraniční hodnoty.

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v &\doteq 2.69 \text{ cm s}^{-1} \\ \hat{\mu}_v + 3\hat{\sigma}_v &\doteq 8.04 \text{ cm s}^{-1} \end{aligned}$$

(c) Vidíme, že 4 z 5 hodnot naměřených studentem leží v konfidenčním intervalu. Hodnota 8.17 cm s^{-1} leží vně tohoto intervalu, je tedy pravděpodobně změřena s hrubou chybou a proto ji v dalších výpočtech vynecháme.

(d) Dohromady máme k dispozici sadu 16 spolehlivých hodnot rychlosti v . Očekávanou hodnotu a standardní odchylku odhadneme stejným způsobem jako v bodě (a).

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{16} v_n = 5.27 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{n=1}^{16} (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15} \left(\sum_{n=1}^{16} v_n^2 - 16\bar{v}^2 \right)} \doteq 1.02 \text{ cm s}^{-1}$$

(e) Chybu odhadu $\hat{\mu}_v$ určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{16}} \doteq 0.26 \text{ cm s}^{-1} \quad (4)$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny cm s^{-1} a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

$$\bar{v} = (5.3 \pm 0.3) \text{ cm s}^{-1}$$