

2. zápočtový test  
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky  
NOFY055

8. ledna 2024

## Příklad 1a - lineární regrese

### Zadání:

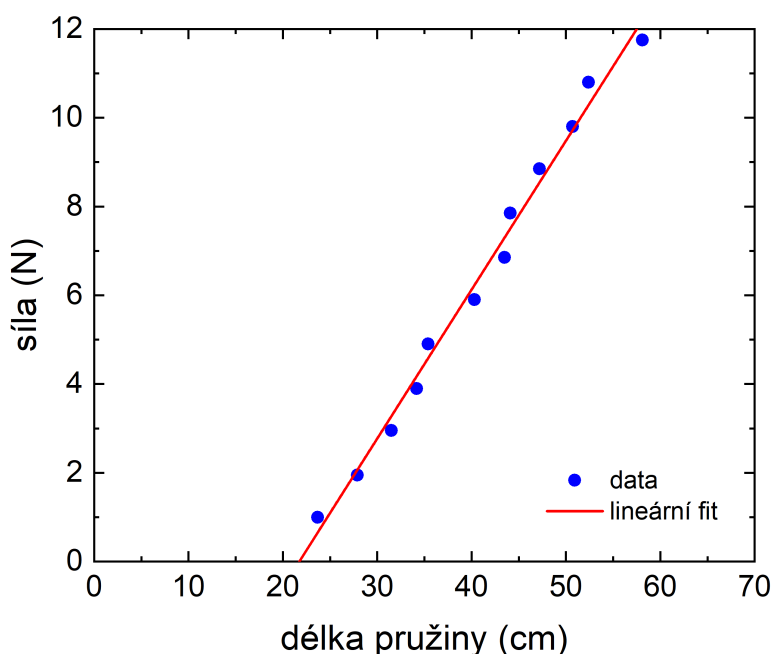
V experimentu byla změřena závislost síly, napínající pružinu, na její délce. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde  $k$  je tuhost pružiny a  $\Delta y$  je prodloužení pružiny v důsledku síly  $F$ .

Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí  $\lambda(x) = ax + b$  s následujícími parametry:  $a = 0.3354$ ,  $\sigma_a = 0.0014$ ,  $b = -7.2931$ ,  $\sigma_b = 0.0603$ ,  $\text{cov}(a, b) = -0.000084$ .

Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu.



Poznámky k řešení:

- Jaké jsou jednotky veličin  $a$ ,  $\sigma_a$ ,  $b$ ,  $\sigma_b$  a  $\text{cov}(a, b)$ ?
- Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny  $k$ , délkou nezatížené pružiny  $y_0$  a nafitovanými parametry  $a$ ,  $b$ ? Pro výpočet chyb  $k$  a  $y_0$  použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.
- Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou!

(10 bodů)

### Řešení:

Označme si sílu jako  $F$  a délku pružiny jako  $y$ . Závislost  $F(y)$  jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem  $F = ay + b$ . Z obrázku vidíme, že jednotkou síly je  $[F] = \text{N}$ , zatímco jednotkou délky je  $[y] = \text{cm}$ . Parametr  $a$  má tudíž jednotku  $[a] = \text{N cm}^{-1}$  a parametr  $b$  má jednotku  $[b] = \text{N}$ . Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů  $\sigma_a$  a  $\sigma_b$ . Kovariance  $\text{cov}(a, b)$  má stejnou jednotku jako součin chyb  $\sigma_a\sigma_b$ , tj.  $[\text{cov}(a, b)] = \text{N}^2\text{cm}^{-1}$ .

Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$\begin{aligned} F &= k(y - y_0) \\ F &= ky - ky_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí  $a = k$  a konstantním členem  $b = -ky_0$ . Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny  $k$  a její délku v nenapjatém stavu  $y_0$ .

$$k = a \quad (2)$$

$$k = 0.3354 \text{ N cm}^{-1} = 33.54 \text{ N m}^{-1}$$

$$y_0 = -\frac{b}{a} \quad (3)$$

$$y_0 = 21.74 \text{ cm} = 0.2174 \text{ m}$$

Chyba tuhosti  $\sigma_k$  se přímo rovná chybě  $\sigma_a$  parametru  $a$ . Musíme si dát jen pozor na jednotku a zaokrouhlit výslednou chybu na 1 platnou číslici.

$$\sigma_k = \sigma_a \quad (4)$$

$$\sigma_k = 0.0014 \text{ N cm}^{-1} = 0.14 \text{ N m}^{-1} \doteq 0.1 \text{ N m}^{-1}$$

Chybu délky  $\sigma_{y_0}$  získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (3).

$$\begin{aligned} \sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{\partial y_0}{\partial a}\right)\left(\frac{\partial y_0}{\partial b}\right)\text{cov}(a, b) \\ \sigma_{y_0}^2 &= \left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 + 2\left(\frac{b}{a^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)\text{cov}(a, b) \\ \sigma_{y_0} &= \sqrt{\left(\frac{b}{a^2}\sigma_a\right)^2 + \left(-\frac{1}{a}\sigma_b\right)^2 - 2\frac{b}{a^3}\text{cov}(a, b)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{y_0} = 0.09 \text{ cm} = 0.0009 \text{ m}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru.

$$k = (33.5 \pm 0.1) \text{ N m}^{-1}$$

$$\text{případně: } k = (33.5 \pm 0.1) \text{ kg s}^{-2}$$

$$y_0 = (21.74 \pm 0.09) \text{ cm}$$

$$\text{případně: } y_0 = (217.4 \pm 0.9) \times 10^{-3} \text{ m}$$

## Příklad 2a - odhady parametrů

### Zadání:

V tabulce je uvedeno 8 hodnot měření rychlosti proudící kapaliny.

n	v (cm s <sup>-1</sup> )
1	3.89
2	3.38
3	7.08
4	3.32
5	4.40
6	1.76
7	5.85
8	3.07

(a) Vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné  $v$ .

(b) Nakreslete graf hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné  $v$ .

(c) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru!**

(5 bodů)

### Řešení:

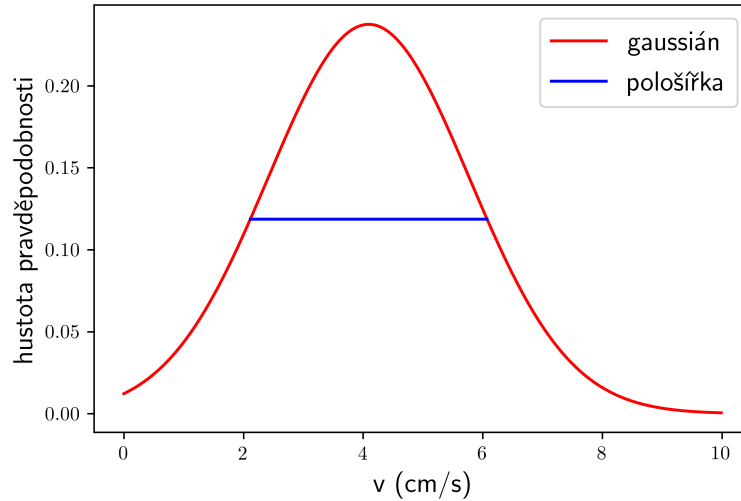
(a) Očekávanou hodnotu  $\hat{\mu}_v$  odhadneme jako aritmetický průměr naměřených hodnot  $v_n$ .

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$
$$\bar{v} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 v_n = 4.09375 \text{ cm s}^{-1}$$

Odchylku  $\hat{\sigma}_v$  vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (v_n - \bar{v})^2}$$
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{n=1}^8 (v_n - \bar{v})^2}$$
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \sum_{n=1}^N v_n^2 - N\bar{v}^2 \right)}$$
$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{7} \left( \sum_{n=1}^8 v_n^2 - 8\bar{v}^2 \right)} \doteq 1.68 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě jsme implicitně předpokládali, že náhodná proměnná má normální rozdělení  $N(\mu_v, \sigma_v)$ . Graf hustoty pravděpodobnosti je tedy gaussian s očekávanou hodnotou  $\hat{\mu}_v$  a standardní odchylkou  $\hat{\sigma}_v$ . Postačí nakreslit gaussian centrováný okolo střední hodnoty  $4.1 \text{ cm s}^{-1}$  s pološířkou  $w = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \doteq 4.0 \text{ cm s}^{-1}$ .



(c) Chybu odhadu  $\hat{\mu}_v$  určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{8}} \doteq 0.59 \text{ cm s}^{-1}$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny  $\text{cm s}^{-1}$  a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

$$\bar{v} = (4.1 \pm 0.6) \text{ cm s}^{-1}$$

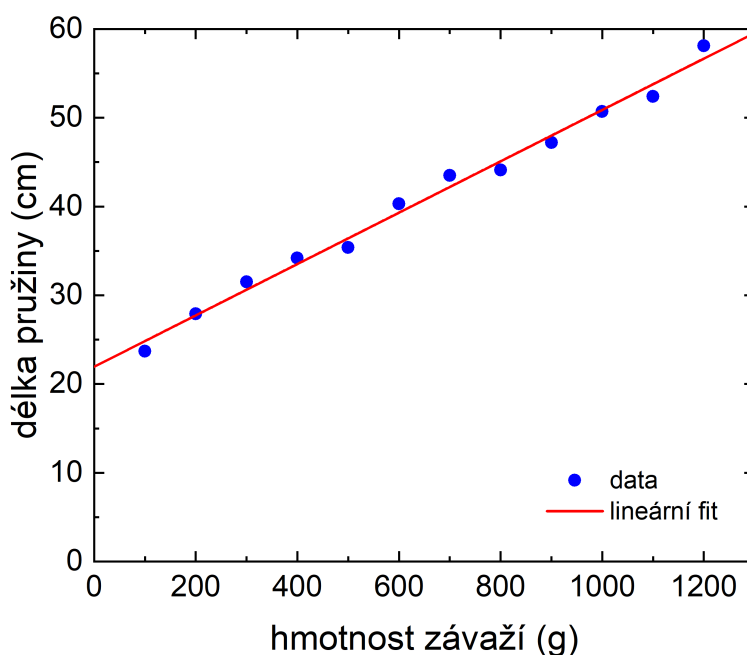
## Příklad 1b - lineární regrese

V experimentu byla změřena závislost délky pružiny na hmotnosti závaží, kterým byla pružina zatížena. Pro velikost síly, působící na pružinu, platí lineární vztah

$$F = k \cdot \Delta y,$$

kde  $k$  je tuhost pružiny a  $\Delta y$  je prodloužení pružiny v důsledku síly  $F$ .

Naměřená závislost byla proložena obecnou přímkou danou rovnicí  $\lambda(x) = ax + b$  s následujícími parametry:  $a = 0.02894$ ,  $\sigma_a = 0.00017$ ,  $b = 21.94$ ,  $\sigma_b = 0.12$ . Určete tuhost pružiny a její délku v nezatíženém stavu. Počítejte s velikostí tíhového zrychlení  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ .



Poznámky k řešení:

- Jaké jsou jednotky veličin  $a$ ,  $\sigma_a$ ,  $b$ ,  $\sigma_b$ ?
- Jaký je vztah mezi tuhostí pružiny  $k$ , délkou nezatížené pružiny  $y_0$  a naitovanými parametry  $a$ ,  $b$ ? Pro výpočet chyb  $k$  a  $y_0$  použijte tyto vztahy a metodu přenosu chyb.
- Výsledky zapište **ve správném tvaru** a se správnou jednotkou!

(5 bodů)

### Řešení:

Označme si délku pružiny jako  $y$  a hmotnost závaží jako  $m$ . Závislost  $y(m)$  jsme nafitovali lineární funkcí s předpisem  $y = am + b$ . Z obrázku vidíme, že jednotkou délky je  $[y] = \text{cm}$ , zatímco jednotkou hmotnosti je  $[m] = \text{g}$ . Parametr  $a$  má tudíž jednotku  $[a] = \text{cm g}^{-1}$  a parametr  $b$  má jednotku  $[b] = \text{cm}$ . Totéž samozřejmě platí i pro (absolutní) chyby těchto parametrů  $\sigma_a$  a  $\sigma_b$ .

Lineární závislost působící síly na prodloužení pružiny si upravíme následovně.

$$\begin{aligned}mg &= k(y - y_0) \\ y &= \frac{g}{k}m + y_0\end{aligned}\tag{1}$$

Rovnice (1) tedy odpovídá lineární funkci se směrnicí  $a = g/k$  a konstantním členem  $b = y_0$ . Dosazením do těchto vztahů vypočítáme tuhost pružiny  $k$  a její délku v nenapjatém stavu  $y_0$ .

$$k = \frac{g}{a}\tag{2}$$

$$k = 338.98 \text{ m s}^{-2} \text{ g cm}^{-1} = 33.898 \text{ kg s}^{-2}$$

$$y_0 = b\tag{3}$$

$$y_0 = 21.94 \text{ cm} = 0.2194 \text{ m}$$

Chybu tuhosti  $\sigma_k$  získáme použitím metody přenosu chyb na rovnici (2).

$$\begin{aligned}\sigma_k^2 &= \left(\frac{\partial k}{\partial a}\sigma_a\right)^2 \\ \sigma_k &= \frac{g}{a^2}\sigma_a \\ \sigma_k &= 1.96 \text{ m s}^{-2} \text{ g cm}^{-1} = 0.196 \text{ kg s}^{-2} \doteq 0.2 \text{ kg s}^{-2}\end{aligned}\tag{4}$$

Chyba délky  $\sigma_{y_0}$  se přímo rovná chybě  $\sigma_b$  parametru  $b$ .

$$\begin{aligned}\sigma_{y_0} &= \sigma_b \\ \sigma_{y_0} &= 0.12 \text{ cm} \doteq 0.1 \text{ cm}\end{aligned}\tag{5}$$

Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s chybami zaokrouhlenými na 1 platnou číslici a středními hodnotami zaokrouhlenými na stejný řád platné číslice jako příslušné chyby.

$$\begin{aligned}k &= (33.9 \pm 0.2) \text{ kg s}^{-2} \\ y_0 &= (21.9 \pm 0.1) \text{ cm} \\ \text{případně: } y_0 &= (219 \pm 1) \times 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

## Příklad 2b - odhady parametrů

### Zadání:

V tabulce je uvedeno 12 hodnot rychlosti proudící kapaliny změřených učitelem a 5 hodnot rychlosti proudící kapaliny následně změřených studentem.

$n_1$	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )	$n_2$	$v$ (cm s <sup>-1</sup> )
1	5.34	1	8.07
2	4.87	2	3.09
3	6.24	3	5.91
4	3.81	4	4.29
5	6.17	5	6.27
6	5.52		
7	5.33		
8	4.80		
9	7.09		
10	4.39		
11	5.84		
12	4.98		

- (a) Na základě měření provedeného učitelem vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné  $v$ .
- (b) Definujte konfidenční interval hodnot  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  neboli tzv.  $3\sigma$  kritérium.
- (c) Otestujte, zda není žádná z hodnot naměřených studentem zatížená hrubou chybou.
- (d) Na základě všech spolehlivě naměřených hodnot (učitelem i studentem) vypočítejte nejlepší odhad očekávané hodnoty a standardní odchylky náhodné proměnné  $v$ .
- (e) Určete průměrnou rychlost proudící kapaliny a její chybu. Výsledek zapište **ve správném tvaru!**

(10 bodů)

### Řešení:

(a) Očekávanou hodnotu  $\hat{\mu}_v$  odhadneme jako aritmetický průměr hodnot  $v_n$  naměřených učitelem.

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n$$
$$\bar{v} = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{12} v_n = 5.3683 \text{ cm s}^{-1}$$



Odchylku  $\hat{\sigma}_v$  vypočítáme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad standardní odchylky.

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11} \sum_{n=1}^{12} (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \sum_{n=1}^N v_n^2 - N\bar{v}^2 \right)}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{11} \left( \sum_{n=1}^{12} v_n^2 - 12\bar{v}^2 \right)} \doteq 0.89 \text{ cm s}^{-1}$$

(b) V předchozím bodě implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná má normální rozdělení  $N(\mu_v, \sigma_v)$ . Konfidenční interval  $(\hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v, \hat{\mu}_v + 3\hat{\sigma}_v)$  definující  $3\sigma$  kritérium má následující hraniční hodnoty.

$$\hat{\mu}_v - 3\hat{\sigma}_v \doteq 2.70 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\mu}_v + 3\hat{\sigma}_v \doteq 8.04 \text{ cm s}^{-1}$$

(c) Vidíme, že 4 z 5 hodnot naměřených studentem leží v konfidenčním intervalu. Hodnota  $8.07 \text{ cm s}^{-1}$  leží vně tohoto intervalu, je tedy pravděpodobně změřena s hrubou chybou a pro další výpočet ji nebudeme uvažovat.

(d) Dohromady máme k dispozici sadu 16 spolehlivých hodnot rychlosti  $v$ . Očekávanou hodnotu a standardní odchylku odhadneme stejným způsobem jako v bodě (a).

$$\hat{\mu}_v \equiv \bar{v} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{16} v_n = 5.24875 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{n=1}^{16} (v_n - \bar{v})^2}$$

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{1}{15} \left( \sum_{n=1}^{16} v_n^2 - 16\bar{v}^2 \right)} \doteq 1.03 \text{ cm s}^{-1}$$

(e) Chybu odhadu  $\hat{\mu}_v$  určíme pomocí přenosu chyb jako chybu aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\hat{\sigma}_v}{\sqrt{N}} = \frac{1.03}{\sqrt{16}} \doteq 0.26 \text{ cm s}^{-1}$$

Průměrnou rychlost proudění a její chybu zaokrouhlíme na desetiny  $\text{cm s}^{-1}$  a výsledek zapíšeme ve správném tvaru následovně.

$$\bar{v} = (5.2 \pm 0.3) \text{ cm s}^{-1}$$