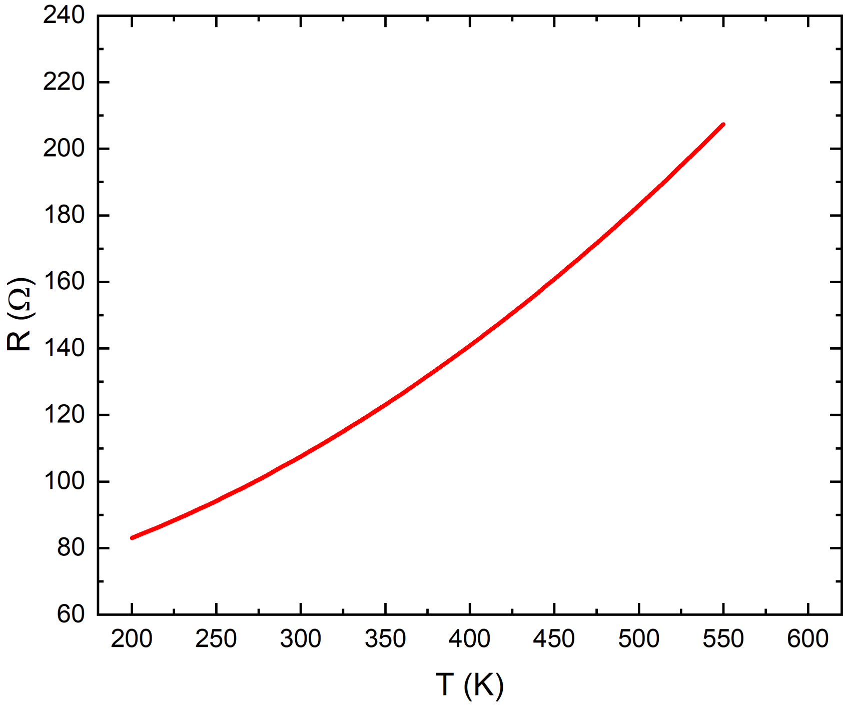
Příklad 1 - interpolace a extrapolace

Zadání:
Podle údajů od výrobce závisí elektrický odpor R součástky na teplotě T kvadraticky podle funkce $R = a + bT + cT^2$ s následujícími nezávislými parametry:

$$
\begin{aligned}
a &= 60.4\ \Omega & \sigma_a &= 8.2\ \Omega \\
b &= 25.2 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-1} & \sigma_b &= 9.3 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-1} \\
c &= 0.442 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-2} & \sigma_c &= 0.048 \times 10^{-3}\ \Omega\,\mathrm{K}^{-2}
\end{aligned}
$$



Jaký je odpor součástky při teplotách $T_1 = 300$ K a $T_2 = 600$ K (očekávaná hodnota a chyba)? Výsledky zapište ve správném tvaru.

(10 bodů)

Řešení:
Spočítejme hodnoty odporů R_1 a R_2 dosazením teplot $T_1 = 300$ K a $T_2 = 600$ K do teoretického kvadratického vztahu.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= a + bT_1 + cT_1^2 = 107.74\ \Omega \\
R_2 &= a + bT_2 + cT_2^2 = 234.64\ \Omega
\end{aligned}
$$

Odpor R_1 jsme hledali uvnitř intervalu měřených teplot 200 - 550 K (interpolace), zatímco odpor R_2 jsme získali mimo tento interval (extrapolace).
V jednodušším případě nezávislých parametrů kvadratické funkce a, b, c jsou jejich vzájemné kovariance nulové. Chyby vypočítaných odporů R_1 a R_2 určíme pomocí metody přenosu chyb σ_a, σ_b, σ_c parametrů a, b, c.

$$\sigma_{R_1}^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_1}{\partial c}\sigma_c\right)^2$$

$$\sigma_{R_1}^2 = (\sigma_a)^2 + (\sigma_b T_1)^2 + \left(\sigma_c T_1^2\right)^2$$

$$\sigma_{R_1} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 T_1^2 + \sigma_c^2 T_1^4}$$

$$\sigma_{R_1} = 9.68\ \Omega$$

$$\sigma_{R_2}^2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial b}\sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_2}{\partial c}\sigma_c\right)^2$$

$$\sigma_{R_2}^2 = (\sigma_a)^2 + (\sigma_b T_2)^2 + \left(\sigma_c T_2^2\right)^2$$

$$\sigma_{R_2} = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 T_2^2 + \sigma_c^2 T_2^4}$$

$$\sigma_{R_2} = 19.92\ \Omega$$

Obě chyby σ_{R_1} a σ_{R_2} zaokrouhlíme na desítky Ω a podle nich zaokrouhlíme i očekávané hodnoty R_1 a R_2. Výsledné odpory můžeme zapsat ve tvaru:

$$R_1 = (110 \pm 10)\ \Omega$$
$$R_2 = (230 \pm 20)\ \Omega$$

nebo lépe[1] ve tvaru:

$$R_1 = (0.11 \pm 0.01)\ \mathrm{k}\Omega$$
$$R_2 = (0.23 \pm 0.02)\ \mathrm{k}\Omega$$

[1]Chyby ve tvaru $\sigma_{R_1} = 10\ \Omega$ a $\sigma_{R_2} = 20\ \Omega$ jsou uvedené na 2 platné číslice, což není správný výsledek. Proto je vhodnější je zapsat ve tvaru $\sigma_{R_1} = 0.01\ \mathrm{k}\Omega$ a $\sigma_{R_2} = 0.02\ \mathrm{k}\Omega$ obsahujícím pouze 1 platnou číslici. Poznamenejme, že výsledky zapsané na 2 platné číslice chyby jsou správně $R_1 = (108 \pm 10)\ \Omega$ a $R_2 = (235 \pm 20)\ \Omega$.

Příklad 2 - odhady parametrů

Zadání:
V tabulce je uvedeno 10 hodnot měření tloušťky tenké hliníkové vrstvy pomocí kontaktního profilometru.
Jaká je tloušťka tenké vrstvy?

n	d (nm)
1	211
2	213
3	212
4	212
5	218
6	205
7	215
8	220
9	225
10	228

Poznámky k řešení:

(a) Předpokládáme, že d je náhodná proměnná s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma)$. Určete parametry μ a σ jako nejlepší odhady těchto parametrů.

(b) Jaký typ neurčitosti (typ A nebo B) je standardní odchylka σ?

(c) Vypočítejte chybu odhadu očekávané hodnoty μ.

(d) Výsledek zapište **ve správném tvaru**!

(5 bodů)

Řešení:
(a) Očekávanou hodnotu odhadneme jako aritmetický průměr $\bar{d}$ naměřených hodnot tloušťky d_i. Standardní odchylku odhadneme pomocí vzorce pro nepředpojatý odhad.

$$\hat{\mu} = \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \tag{1}$$

$$\hat{\mu} = \bar{d} = 215.9 \text{ nm}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} \tag{2}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2\right)} \tag{3}$$

$$\hat{\sigma} = 6.9 \text{ nm}$$

Poznamenejme, že vztah (3), který lze získat jednoduchou úpravou vztahu (2), umožňuje jednodušší výpočet odhadu standardní odchylky $\hat{\sigma}$.

(b) Odchylku $\hat{\sigma}$ jsme zpracovali statistickými metodami, jedná se o neurčitost typu A.

(c) Každá naměřená hodnota d_i je zatížena pouze statistickou chybou $\hat{\sigma}$. Chybu aritmetického průměru spočítáme známým vzorcem, kde za chybu jednoho měření dosadíme chybu jednoho měření $\hat{\sigma}$.

$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$
$$\sigma_{\bar{d}} = 2.2 \text{ nm} \doteq 2 \text{ nm}$$

(d) Zapišme výsledek ve správném tvaru, tj. s průměrnou tloušťkou $\bar{d}$ i s chybou $\sigma_{\bar{d}}$ zaokrouhlenými na nanometry.

$$d = (216 \pm 2) \text{ nm}$$