# Příklad 1 - měření periody matematického kyvadla

**Zadání:**
V tabulce jsou uvedeny výsledky měření periody kmitů matematického kyvadla. Pro větší přesnost byla vždy změřena doba 10 kmitů $10\,T$.

| $n$ | $10\,T$ (s) |
|---|---|
| 1 | 17.8 |
| 2 | 18.1 |
| 3 | 18.0 |
| 4 | 17.8 |
| 5 | 17.9 |
| 6 | 17.8 |
| 7 | 18.0 |
| 8 | 18.1 |
| 9 | 17.9 |
| 10 | 17.7 |

(a) Vypočítejte odhad očekávané hodnoty $\mu_T$ a odchylky $\sigma$ periody $T$.

(b) Jaký typ neurčitosti je vypočítaná odchylka $\sigma$ (typ A nebo B)?

(c) Přesnost měření času (standardní odchylku) odhadujeme jako 0.05 s. Jaká je velikost dodatečné chyby, kterou je zatížená perioda $T$?

(d) Jaký typ neurčitosti je tato dodatečná chyba (typ A nebo B)?

(e) Vypočítejte celkovou neurčitost $\sigma_C$ měření periody $T$.

(f) Vypočítejte chybu odhadu $\mu_T$ očekávané hodnoty periody $T$.

(g) Zapište výsledek měření ve správném tvaru.

(10 bodů)

**Řešení**:
(a) V prvním kroku je potřeba vydělit všechny naměřené hodnoty $10\,T$ deseti. Odhad očekávané hodnoty $\mu_T$ vypočítáme jako aritmetický průměr naměřených period $T_n$.

$$\mu_T = \bar{T} = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{10} T_n = 1.791 \text{ s}$$

Odchylku 1 měření periody vypočítáme jako nepředpojatý odhad standardní odchylky.

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{10}(T_n - \bar{T})^2} = 0.014 \text{ s}$$

(b) Odchylka $\sigma_A$ má původ v náhodných jevech a je tedy neurčitostí typu A.

(c) Čas, tj. 10 period kmitů, měříme standardně s přesností 0.1 s. Odhad $\sigma = 0.05$ s je polovinou této přesnosti. Každá hodnota periody $T$ je tudíž zatížena dodatečnou chybou $\sigma_B = 0.005$ s, která je 10krát nižší než v případě měření 10 period kmitů.

(d) Odchylka $\sigma_B$ je dána odhadem přesnosti měřicí metody a je tedy neurčitostí typu B.

(e) Celková neurčitost měření periody $T$ je dána odmocninou ze součtu kvadrátů neurčitostí typu A a B.

$$\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = 0.015 \text{ s}$$

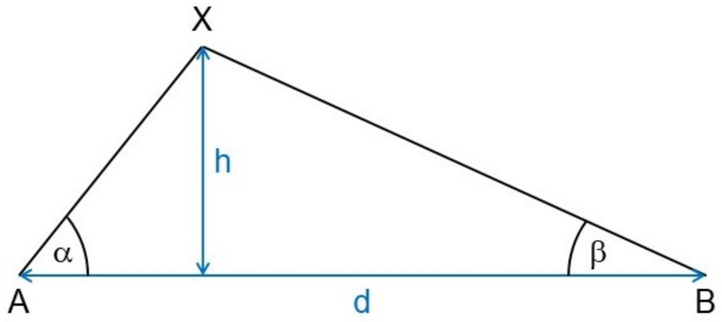
(f) Každá hodnota $T_n$ je tedy určena s chybou $\sigma_C$. Chyba odhadu očekávané hodnoty je dána chybou aritmetického průměru.

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_C}{\sqrt{10}} = 0.005$$

(g) Výsledek měření periody zapíšeme ve správném tvaru jako $T = (1.791 \pm 0.005)$ s.

# Příklad 2 - chyba triangulace

**Zadání:**
Pomocí triangulace je možné měřit vzdálenost velmi dalekých těles. Známe-li vzdálenost $d$ dvou pozorovatelů $A$ a $B$, kteří současně pozorují bod $X$ pod úhly $\alpha$ a $\beta$, můžeme dopočítat vzdálenost $h$.




$$h = \frac{d\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta} = \frac{d}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta}$$

Triangulací byla při demonstračním experimentu změřena výška učebny následovně. Pomocí 2 laserových ukazovátek namířených do stejného bodu na stropě byly určeny úhly $\alpha = (57 \pm 1)^\circ$ a $\beta = (74.5 \pm 0.5)^\circ$. Vzdálenost obou ukazovátek je $d = (6.72 \pm 0.03)$ m. Vypočítejte výšku místnosti $h$ a její chybu $\sigma_h$. Výsledek zapište ve správném tvaru.

(5 bodů)

**Řešení**:
Spočítejme hodnotu výšky $h$ pomocí druhého, jednoduššího vztahu.

$$h = \frac{d}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta} = 7.3 \text{ m}$$

Chybu výšky $h$ určíme pomocí metody přenosu chyb. Uvažujeme, že vzdálenost $d$ a úhly $\alpha$ a $\beta$ jsou nezávislé veličiny a jejich kovariance jsou tedy nulové. Zároveň nesmíme zapomenou převést chyby úhlů $\sigma_\alpha$ a $\sigma_\beta$ do radiánů.

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta}\sigma_\beta\right)^2$$

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{\sigma_d}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta}\right)^2 + \left(\frac{d}{(\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta)^2}\frac{\sigma_\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d}{(\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta)^2}\frac{\sigma_\beta}{\sin^2\beta}\right)^2$$

$$\sigma_h = \sqrt{\left(\frac{h}{d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{h^2}{d}\frac{\sigma_\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{h^2}{d}\frac{\sigma_\beta}{\sin^2\beta}\right)^2} = 0.2 \text{ m}$$

Výslednou výšku zapíšeme ve správném tvaru jako $h = (7.3 \pm 0.2)$ m.