

1. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

25. listopadu 2025

Příklad 1a - schodiště ve věži rozhledny

Zadání:

Věž rozhledny má celkem 255 schodů, z nichž každý schod má výšku (21.8 ± 0.2) cm. Někde mezi 182. a 183. schodem je umístěna vlajka.

(a) Vypočítejte výšku h v metrech, ve které je umístěna vlajka. Určete maximální chybu a standardní odchylku měření h . Zapište výsledek měření **ve správném tvaru**.

(b) Stručně popište dvě složky, kterými je dána maximální chyba měření h , a nalezněte analogii mezi složkami maximální chyby analogově-digitálního převodníku. Jakým ekvivalentním způsobem byste obecně zapsali maximální chybu měření výšky h ?

Poznámka: Chybu výšky schodu 0.2 cm považujte za chybu maximální.

(10 bodů)

Řešení:

Ze zadání lze považovat výšku vlajky za náhodnou proměnnou s rovnoměrným rozdělením mezi 182. a 183. schodem. Její očekávaná hodnota je tedy uprostřed intervalu a odpovídá výšce 182.5 schodů.

$$\mu_h = 182.5 \times 21.8 \text{ cm} = 3978.5 \text{ cm} \quad (1)$$

První složka maximální chyby výšky h je dána nepřesností výšky každého schodu. Tato nepřesnost narůstá s rostoucím počtem schodů.

$$\varepsilon_1 = 182.5 \times 0.2 \text{ cm} = 36.5 \text{ cm} \quad (2)$$

Druhá složka maximální chyby výšky h je dána konečnou výškou schodu. Skutečná výška je někde mezi 182. a 183. schodem, což odpovídá intervalu maximální chyby $(182.5 - \varepsilon_2, 182.5 + \varepsilon_2)$. Druhá složka maximální chyby je tedy rovna polovině výšky schodu a je nezávislá na výšce h .

$$\varepsilon_2 = 0.5 \times 21.8 \text{ cm} = 10.9 \text{ cm} \quad (3)$$

Celková maximální chyba výšky ε_h je součtem chyb ε_1 a ε_2 .

$$\varepsilon_h = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4)$$

$$\varepsilon_h = 47.4 \text{ cm} \quad (5)$$

Standardní odchylku vypočítáme vydělením maximální chyby faktorem $\sqrt{3}$.

$$\sigma_h = \frac{\varepsilon_h}{\sqrt{3}} \doteq 27.4 \text{ cm} \quad (6)$$

Pro správný zápis výsledku měření převedeme odchylku σ_h na metry a zaokrouhlíme ji na jednu platnou číslici. Výšku h potom zaokrouhlíme na stejný řád platné číslice odchylky σ_h , tedy na desetiny metru.

$$h = (39.8 \pm 0.3) \text{ m} \quad (7)$$

Poznamenejme, že při přisouzení výšky h 182. nebo 183. schodu by systematicky snížilo resp. zvýšilo hodnotu h oproti správnému výsledku. Maximální chyby ε_1 a ε_2 by vzhledem k přesnosti dané zaokrouhlováním zůstaly stejné. Nicméně výsledky $h = (39.7 \pm 0.3) \text{ m}$ resp. $h = (39.9 \pm 0.3) \text{ m}$ by byly zatížené systematickou chybou.

Analogie s chybou analogově-digitálního převodníku je zřejmá. Maximální chyba daná nelinearitou převodníku, která je úměrná naměřené hodnotě, je analogická s chybou ε_1 . Obvykle se vyjadřuje jako procento naměřené hodnoty (*reading* = *rdg.*). V našem případě:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 182.5 \times 0.2 \text{ cm} \\ \varepsilon_1 &= \frac{3978.5 \text{ cm}}{21.8 \text{ cm}} \times 0.2 \text{ cm} \\ \varepsilon_1 &= \mu_h \times 0.0092 \\ \varepsilon_1 &\doteq \mu_h \times 0.9 \% \end{aligned} \tag{8}$$

Maximální chyba daná konečnou šířkou binu je analogická chybě plynoucí z nenulové výšky schodu ε_2 . Obvykle se vyjadřuje jako násobek poslední platné číslice (*digit* = *dgt.*) naměřené hodnoty. V našem případě:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= 0.5 \times 21.8 \text{ cm} \\ \varepsilon_2 &= 0.5 \times \text{schodu} \end{aligned} \tag{9}$$

Pro budoucí měření výšky bychom maximální chybu měření mohli napsat ve tvaru:

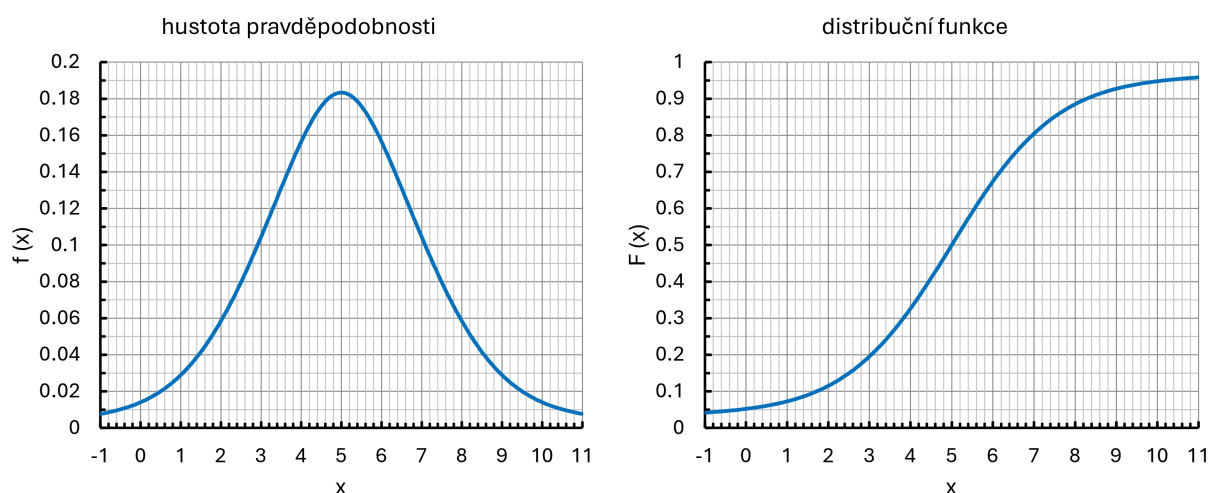
$$\varepsilon_h = 0.9 \% \text{ rdg.} + 0.5 \text{ dgt.} \tag{10}$$

Příklad 2a - pseudo-Voigtova funkce

Zadání:

Na obrázku jsou grafy hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ a distribuční funkce $F(x)$ náhodné proměnné x . Určete integrální pološířku Δ funkce $f(x)$, pro kterou platí, že pravděpodobnost:

$$P\left\{x \in \left[\mu - \frac{\Delta}{2}, \mu + \frac{\Delta}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2}$$



Poznámka: Počítejte pouze v rámci přesnosti – vodorovné a svislé vodící úsečky – danou oběma grafy. Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ je symetrická vzhledem ke své očekávané hodnotě $\mu = 5$.

(5 bodů)

Řešení:

Ačkoli se integrální pološířka z definice týká hustoty pravděpodobnosti, je mnohem výhodnější vyhnout se při jejím výpočtu integrování a použít distribuční funkce. Pravděpodobnost intervalu hodnot náhodné proměnné $x \in [\mu - \frac{\Delta}{2}, \mu + \frac{\Delta}{2}]$ si lze vyjádřit jako rozdíl distribučních funkcí.

$$P\left\{x \in \left[\mu - \frac{\Delta}{2}, \mu + \frac{\Delta}{2}\right]\right\} = F\left(\mu + \frac{\Delta}{2}\right) - F\left(\mu - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (1)$$

$$0.5 = 0.75 - 0.25 \quad (2)$$

Z obrázku vyčteme, že distribuční funkce nabývá hodnoty 0.25 v intervalu od 3.4 až 3.6 a hodnoty 0.75 v intervalu od 6.4 do 6.6.

$$F(x_1) = 0.25 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \mu - \frac{\Delta}{2} \in (3.4, 3.6) \quad (3)$$

$$F(x_2) = 0.75 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \mu + \frac{\Delta}{2} \in (6.4, 6.6) \quad (4)$$

Známe-li očekávanou hodnotu $\mu = 5$, můžeme odhadnout polovinu integrální pološířky jako

$$\frac{\Delta}{2} \in (1.4, 1.6) . \quad (5)$$

Vzhledem k omezené přesnosti při odečítání hodnot z grafů, můžeme předpokládat, že náhodná proměnná má v intervalu $(1.4, 1.6)$ rovnoměrné rozdělení. Její očekávaná hodnota je rovna aritmetickému průměru krajních hodnot intervalu.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} &\doteq 1.5 \\ \Delta &\doteq 3 \end{aligned} \quad (6)$$

Stejného výsledku bychom dosáhli následující úvahou. Velikost integrální pološířky Δ je rovna rozdílu hodnot $x_2 - x_1$. Pro všechny možné hodnoty x_1 a x_2 podle rovnic (3) a (4) je minimální hodnota jejich rozdílu 2.8, zatímco maximální hodnota je 3.2.

$$\Delta \in (2.8, 3.2) \quad (7)$$

Poslední vztah je již ekvivalentní rovnici (5).

Poznamenejme, že hustota pravděpodobnosti $f(x)$ odpovídá tzv pseudo-Voigtově funkci, která je rovna součtu gaussiánu (váha 0.6, $\mu = 5$, $\sigma = 2$) a lorentziánu (váha 0.4, $x_0 = 5$, $L = 2$). Integrální pološířka takové funkce je $\Delta = 3.06208$.

Příklad 1b - hra s kostkou

Zadání:

Při hře s klasickou kostkou platí následující pravidla.

- Padne-li prvočíslo, postoupíme s figurkou o 2 políčka.
- Padne-li složené číslo, v daném kole stojíme.
- Padne-li jednička, házíme ještě jednou.

(a) Vypočítejte očekávanou hodnotu μ a standardní odchylku σ vzdálenosti, kterou urazí figurka po 10 kolech.

(b) S jakou pravděpodobností padne výsledek příznivý intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$?

Poznámka: Klasickou kostkou myslíme krychli s čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 na stěnách. Pravděpodobnosti, že padne jakékoli z těchto čísel jsou stejné.

(10 bodů)

Řešení:

Počítejme s náhodnou proměnnou k (počet úspěchů), jejíž pravděpodobnosti jsou popsány binomickým rozdělením $P(k|N, p)$.

$$P(k|N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (1)$$

Úspěch a neúspěch můžeme pro naši hru definovat následovně:

- Úspěch: padne prvočíslo (2,3 nebo 5), pravděpodobnost $p = 0.6$.
- Neúspěch: padne složené číslo (4 nebo 6), pravděpodobnost $1 - p = 0.4$.

Poznamenejme, že v případě, kdy padne na kostce jednička, nemusíme uvažovat, neboť vždy nakonec skončí úspěchem nebo neúspěchem. Vzdálenost L , kterou urazí figurka za $N = 10$ kol je rovna dvojnásobku počtu úspěchů. Ze známé očekávané hodnoty binomického rozdělení můžeme tedy přímo vypočítat očekávanou hodnotu vzdálenosti.

$$\mu_k = Np = 6 \quad (2)$$

$$\mu_L = 2\mu_k = 12 \quad (3)$$

Obdobně můžeme vypočítat standardní odchylku vzdálenosti L .

$$\sigma_k^2 = Np(1-p) = 2.4 \quad (4)$$

$$\sigma_k \doteq 1.55 \quad (5)$$

$$\sigma_L = 2\sigma_k \doteq 3.1 \quad (6)$$

Intervalu $\mu_L \pm \sigma_L$ odpovídají rozsahy vzdáleností od 8.9 do 15.1. Ekvivalentnímu intervalu $\mu_k \pm \sigma_k$ odpovídá počet úspěchů od 4.45 do 7.55. Vzhledem k tomu, že náhodná proměnná

k může nabývat pouze celočíselných hodnot, jsou tomuto výsledku příznivé výsledky s 5, 6 nebo 7 úspěšnými hody. Počítáme tedy součet jejich pravděpodobností.

$$\begin{aligned}P &= P(5) + P(6) + P(7) \\P &= \binom{10}{5} 0.4^5 0.6^5 + \binom{10}{6} 0.4^6 0.6^4 + \binom{10}{7} 0.4^7 0.6^3 \\P &\doteq 0.666 = 66.6 \% \tag{7}\end{aligned}$$

Příklad 2b - obecný gaussian

Zadání:

Náhodná proměnná $x \in \mathbf{R}$ má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$ s hustotou pravděpodobnosti:

$$f(x) = M \cdot 0.123 \cdot \exp(-0.45x^2 + 0.67x - 0.89)$$

(a) Vypočítejte očekávanou hodnotu μ a standardní odchylku σ .

(b) Určete velikost konstanty M , aby funkce $f(x)$ splňovala normovací podmínku.

Poznámka: Doporučuji provést výpočet bez integrování.

(5 bodů)

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení má obecně tvar:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1)$$

Je nutné tedy v argumentu naší hustoty pravděpodobnosti provést doplnění na čtverec.

$$\begin{aligned} -0.45x^2 + 0.67x - 0.89 &= -0.45 \left(x^2 - \frac{67}{45}x + \frac{89}{45} \right) \\ &= -0.45 \left[x^2 - 2 \cdot \frac{67}{90}x + \left(\frac{67}{90} \right)^2 - \left(\frac{67}{90} \right)^2 + \frac{89}{45} \right] \\ &= -0.45 \left[\left(x - \frac{67}{90} \right)^2 + \frac{-67^2 + 89 \cdot 2 \cdot 90}{90^2} \right] \\ &= -0.45 \left(x - \frac{67}{90} \right)^2 - \frac{11531}{18000} \end{aligned} \quad (2)$$

Prostým porovnáním s rovnicí (1) můžeme přímo vyjádřit parametry μ a σ .

$$\begin{aligned} (x - \mu)^2 &= \left(x - \frac{67}{90} \right)^2 \\ \mu &= \frac{67}{90} \doteq 0.744 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sigma^2} &= -0.45 \\ \Rightarrow \sigma &= \sqrt{\frac{10}{9}} \doteq 1.054 \end{aligned} \quad (4)$$

Pro zbývající členy platí následující rovnost

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = M \cdot 0.123 \cdot \exp\left(-\frac{11531}{18000}\right), \quad (5)$$

ze které můžeme dopočítat konstantu M .

$$M = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{10}{9}}} \cdot \frac{1}{0.123} \cdot \exp\left(\frac{11531}{18000}\right)$$

$$M = \sqrt{\frac{0.9}{2\pi \cdot 0.123^2}} \cdot \exp\left(\frac{11531}{18000}\right) \tag{6}$$

$$M \doteq 5.839 \tag{7}$$