1. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

25. a 26. listopadu 2024

Příklad 1a - analogový a digitální měřicí přístroj

Zadání:
Součástku o neznámém odporu R připojíme ke zdroji s laditelným napětím $U = 30.7$ V. Fluktuace napětí ve zdroji způsobí dodatečnou neurčitost 0.2 V (maximální chyba).

(a) Do obvodu zapojíme digitální ampérmetr se 4-místným displejem. Přístroj ukazuje hodnotu 138.7 mA a chybu ve tvaru $\pm 0.6\ \% + 3$ dgt.

(b) Do obvodu zapojíme analogový ampérmetr s rozsahem 150 mA a třídou přesnosti 0.5. Přístroj ukazuje hodnotu 140 mA.

Pro oba případy vypočítejte pomocí Ohmova zákona hodnotu odporu součástky R. Dále vypočítejte chybu σ_R a zapište výsledek měření ve správném tvaru.

Poznámka: Nezapomeňte na rozdíl mezi maximálními chybami (ε, Δ) a standardními chybami (σ).

(10 bodů)

Řešení:
(a) Maximální chybu měření digitálním ampérmetrem spočítáme následovně.

$$\varepsilon_I = 0.006 \times 138.7 \text{ mA} + 3 \times 0.1 \text{ mA}$$
$$\varepsilon_I = 1.1322 \text{ mA}$$

(b) Maximální chybu měření analogovým ampérmetrem spočítáme pomocí třídy přesnosti.

$$\varepsilon_I = \frac{0.5 \times 150 \text{ mA}}{100}$$
$$\varepsilon_I = 0.75 \text{ mA}$$

Pro oba měřicí přístroje vypočítáme hodnotu odporu pomocí Ohmova zákona.

$$\text{(a) digitální:} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{30.7 \text{ V}}{138.7 \times 10^{-3} \text{ A}} = 221.34\ \Omega$$

$$\text{(b) analogový:} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{30.7 \text{ V}}{140 \times 10^{-3} \text{ A}} = 219.29\ \Omega$$

Chybu odporu vypočítáme pomocí vzorce pro maximální relativní chybu podílu, která je rovna součtu maximálních relativních chyb napětí a proudu.

$$\eta_R = \eta_U + \eta_I$$
$$\frac{\varepsilon_R}{R} = \frac{\varepsilon_U}{U} + \frac{\varepsilon_I}{I}$$
$$\Rightarrow \varepsilon_R = \frac{I\varepsilon_U + U\varepsilon_I}{I^2}$$

Pro digitální ampérmetr dostáváme:

$$\varepsilon_R = \frac{I\varepsilon_U + U\varepsilon_I}{I^2}$$
$$\varepsilon_R = \frac{138.7 \times 10^{-3}\ \text{A} \times 0.2\ \text{V} + 30.7\ \text{V} \times 1.1322 \times 10^{-3}\ \text{A}}{(138.7 \times 10^{-3}\ \text{A})^2}$$
$$\varepsilon_R = 3.25\ \Omega$$

Standardní chybu získáme vydělením maximální chyby odmocninou ze 3. Výslednou chybu σ_R zaokrouhlíme na 1 platnou číslici, následně zaokrouhlíme na stejný řád i hodnotu odporu R a zapíšeme výsledek.

$$\sigma_R = \frac{\varepsilon_R}{\sqrt{3}}$$
$$\sigma_R = 1.88\ \Omega \doteq 2\ \Omega$$
$$R = 221.34\ \Omega \doteq 221\ \Omega$$
$$R = (221 \pm 2)\ \Omega$$

Pro analogový ampérmetr dostáváme:

$$\varepsilon_R = \frac{I\varepsilon_U + U\varepsilon_I}{I^2}$$
$$\varepsilon_R = \frac{140 \times 10^{-3}\ \text{A} \times 0.2\ \text{V} + 30.7\ \text{V} \times 0.75 \times 10^{-3}\ \text{A}}{(140 \times 10^{-3}\ \text{A})^2}$$
$$\varepsilon_R = 2.60\ \Omega$$
$$\sigma_R = \frac{\varepsilon_R}{\sqrt{3}}$$
$$\sigma_R = 1.50\ \Omega \doteq 2\ \Omega$$
$$R = 219.29\ \Omega \doteq 219\ \Omega$$
$$R = (219 \pm 2)\ \Omega$$

Vidíme, že v rámci nepřesnosti měření jsou obě hodnoty odporu součástky R shodné.

Příklad 2a - pološířka spektrální čáry

Zadání:
Pomocí scintilačního detektoru byla změřena energie γ záření produkovaného při radioaktivním rozpadu jader ^{137}Cs. Výsledné energetické spektrum (hustota pravděpodobnosti) má tvar lorentziánu s mediánem $E_0 = 662$ keV a pološířkou $w = 45$ keV. Vypočítejte, kolik procent naměřených hodnot energií spadá do intervalu jedné pološířky.

Poznámka: Rozmyslete si, jak vypadá pro lorentzián interval jedné pološířky.

(5 bodů)

Řešení:
Pološířka w udává „**plnou šířku v polovině výšky**“. Interval jedné pološířky je tedy $E \in [E_0 - w/2, E_0 + w/2]$.

Ze zadání víme, že energetické spektrum má tvar lorentziánu, hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné E můžeme popsat pomocí Cauchyho ($L = w/2$) resp. Breit-Wignerova rozdělení ($\gamma = w$) s hustotou pravděpodobnosti $f(E)$ a distribuční funkcí $F(E)$.

$$
\begin{aligned}
f(E) &= \frac{1}{\pi}\frac{w/2}{w^2/4 + (E - E_0)^2} \\
F(E) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{E - E_0}{w/2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Pravděpodobnost, že náhodná proměnná E bude ležet v intervalu jedné pološířky můžeme spočítat buď pomocí určitého integrálu z hustoty pravděpodobnosti $f(E)$:

$$
\begin{aligned}
P\left\{E \in [E_0 - \frac{w}{2}, E_0 + \frac{w}{2}]\right\} &= \int\limits_{E_0 - \frac{w}{2}}^{E_0 + \frac{w}{2}} f(E)\,\mathrm{d}E \\
&= \int\limits_{E_0 - \frac{w}{2}}^{E_0 + \frac{w}{2}} \frac{1}{\pi}\frac{w/2}{w^2/4 + (E - E_0)^2}\,\mathrm{d}E
\end{aligned}
$$

anebo lépe (a chytřeji) můžeme použít distribuční funkci $F(E)$.

$$
\begin{aligned}
P\left\{E \in [E_0 - \frac{w}{2}, E_0 + \frac{w}{2}]\right\} &= F\left(E_0 + \frac{w}{2}\right) - F\left(E_0 - \frac{w}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(1) - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(-1)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

V intervalu jedné pološířky leží tedy přesně 50 % (polovina) všech naměřených hodnot energií. Tento výsledek platí nezávisle na hodnotě mediánu E_γ a pološířky w.

Příklad 1b - maximální chyba odrazivosti

Zadání:
Excimerový KrF laser vyzařuje ultrafialové záření o vlnové délce 248 nm. Pro zvolený časový úsek (tzv. integrační doba) jsme naměřili intenzitu dopadajícího záření rovnu $I_0 = 39827$ (= počet detekovaných událostí). Po odrazu od zrcátka klesla intenzita na hodnotu $I_1 = 35799$. Odrazivost zrcátka definujeme jako $R = I_1/I_0$.

(a) Jaké rozdělení mají náhodné proměnné I_0 a I_1? Jaké jsou jejich odchylky σ_0 a σ_1?

(b) Vypočítejte očekávanou hodnotu a odchylku odrazivosti R. Výsledek zapište ve správném tvaru.

(c) Jaká by musela být minimální intenzita dopadajícího záření I_0, abychom mohli určit odrazivost zrcátka s přesností na desetitisíciny?

Poznámka: Předpokládejte, že intenzitu I_0 můžeme libovolně měnit zkrácením nebo prodloužením integrační doby, přičemž odrazivost zrcátka se (přirozeně) nezmění. Pro výpočet bodu (c) použijte hodnotu R vypočítanou v bodě (b).

(10 bodů)

Řešení:
(a) Detekce ultrafialových fotonů je náhodný proces s velmi nízkou pravděpodobností detekce konkrétního fotonu. Počet detekovaných fotonů za daný časový úsek je tedy diskrétní náhodná proměnná s Poissonovým rozdělením s očekávanými hodnotami 39827 a 35799. Odpovídající standardní odchylky jsou dány jako odmocniny z očekávaných hodnot.

$$\sigma_0 = \sqrt{I_0} = \sqrt{39827} \doteq 199.57$$
$$\sigma_1 = \sqrt{I_1} = \sqrt{35799} \doteq 189.21$$

(b) Odrazivost R je dána jako poměr intenzit I_1 a I_0.

$$R = \frac{I_1}{I_0} = \frac{35799}{39827} \doteq 0.89886$$

Pro podíl je maximální relativní chyba rovna součtu maximálních relativních chyb čitatele a jmenovatele.

$$\eta_R = \eta_1 + \eta_2$$
$$\frac{\varepsilon_R}{R} = \frac{\varepsilon_1}{I_1} + \frac{\varepsilon_0}{I_0}$$

Poslední rovnici vydělíme $\sqrt{3}$ a dostaneme rovnici pro standardní odchylky σ.

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_R}{R} &= \frac{\sigma_1}{I_1} + \frac{\sigma_0}{I_0} \\
\sigma_R &= \frac{I_1}{I_0}\left(\frac{\sqrt{I_1}}{I_1} + \frac{\sqrt{I_0}}{I_0}\right) \\
\sigma_R &= \frac{I_1}{I_0}\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}} + \frac{1}{\sqrt{I_0}}\right) \\
\sigma_R &= \frac{35799}{39827}\left(\frac{1}{\sqrt{35799}} + \frac{1}{\sqrt{39827}}\right) \\
\sigma_R &= 0.00925 \doteq 0.009
\end{aligned}$$

Chybu i očekávanou hodnotu zaokrouhlíme na tisíciny a zapíšeme výsledek.

$$R = 0.899 \pm 0.009$$

(c) Vyjděme ze vztahu pro chybu σ_R, který jsme odvodili v předchozím bodu.

$$\sigma_R = \frac{I_1}{I_0}\left(\frac{1}{\sqrt{I_1}} + \frac{1}{\sqrt{I_0}}\right)$$

Hledáme takovou hodnotu I_0, pro kterou je $\sigma_R < 0.00095$. Větší chybu bychom zaokrouhlili na 0.001 a výš. Intenzitu I_1 si můžeme vyjádřit jako $I_1 = R \cdot I_0$ a dosadit.

$$\begin{aligned}
\sigma_R &= R\left(\frac{1}{\sqrt{R \cdot I_0}} + \frac{1}{\sqrt{I_0}}\right) \\
\sigma_R &= \frac{\sqrt{R} + R}{\sqrt{I_0}} \\
I_0 &= \frac{\left(\sqrt{R} + R\right)^2}{\sigma_R^2} \\
I_0 &= \frac{R\left(1 + \sqrt{R}\right)^2}{\sigma_R^2}
\end{aligned}$$

Nyní dosadíme hodnotu $R = 0.8989$, zaokrouhlenou na požadovaná 4 desetinné místa, a hodnotu $\sigma_R = 0.00095$. Výsledek zaokrouhlíme nahoru, čímž dostaneme minimální hodnotu I_0.

$$I_0 = 3\,779\,969$$

Vidíme, že pro zvýšení přesnosti měření o 1 řád, musíme zvýšit intenzitu I_0 téměř 100krát.

Příklad 2b - 2σ kritérium

Zadání:
Náhodná proměnná x má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$. Skutečnost, že v intervalu $\pm 2\sigma$, neboli $x \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, se nachází 95.5 % všech hodnot, označujeme jako tzv. 2σ kritérium. Uvažujme, že náhodnou proměnnou x měříme 50krát.

(a) Jaký je průměrný (očekávaný) počet výsledků, které splní 2σ kritérium?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že interval $\pm 2\sigma$ bude obsahovat více hodnot než je tento průměrný počet?

Poznámka: Jaký typ náhodné proměnné je počet výsledků, které padly do intervalu $\pm 2\sigma$?

(5 bodů)

Řešení:
(a) Počet úspěšných výsledků k, které splňují 2σ kritérium, je diskrétní náhodná proměnná s binomickým rozdělením:

$$P(k|N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k},$$

kde $N = 50$ a $p = 0.955$. Očekávaná hodnota je $E[k] = Np = 47.75$.

(b) Zajímá nás případ, kdy do intervalu $\pm 2\sigma$ padlo 48 a více naměřených hodnot.

$$P(48) = \binom{50}{48} 0.955^{48}\ 0.045^2 \doteq 0.2721$$
$$P(49) = \binom{50}{49} 0.955^{49}\ 0.045 \doteq 0.2357$$
$$P(50) = \binom{50}{50} 0.955^{50} \doteq 0.1000$$

$$P(k > 47.75) = P(48) + P(49) + P(50)$$

$$P(k > 47.75) = 0.6078 \doteq 60.8\ \%$$

Pravděpodobnost, že při změření náhodné proměnné 50krát, padne výsledek do intervalu $\pm 2\sigma$ alespoň 48krát, je přibližně 60.8 %.