1. zápočtový test
(45 minut)

Úvod do praktické fyziky
NOFY055

20. listopadu 2023

Příklad 1a - analogový a digitální ampérmetr

Zadání:
Elektrickým obvodem protéká proud o nominální velikosti $I_0 = 45.63$ mA. Tento proud měříme:

(a) analogovým ampérmetrem s garantovanou třídou přesnosti 1, rozsahem 60 mA a stupnicí dělenou na 120 dílků;

(b) digitálním ampérmetrem s 8-bitovým A-D převodníkem, rozsahem 100 mA a 3-místným displejem.

Vypočítejte hodnotu elektrického proudu, kterou zobrazí oba přístroje, vyhodnoťte systematickou chybu, kterou je zatíženo měření proudu, a pro oba přístroje zapište výsledek ve správném tvaru.

Poznámka: A-D převodník digitalizuje spojitý analogový signál tak, že rozdělí měřený rozsah na $2^8 = 256$ binů. V rámci každého binu má měřený signál stejnou hodnotu.

(10 bodů)

Řešení:
(a) Analogový ampérmetr měří proud I_0 s přesností 0.5 mA, danou velikostí nejmenšího dílku jeho stupnice. Při měření z přístroje tedy odečteme zaokrouhlenou hodnotu proudu I_a.

$$I_a = 45.5 \text{ mA}$$

Systematickou chybu měření analogovým ampérmetrem udává jeho třída přesnosti $P = 1$ a rozsah $R = 60$ mA.

$$\sigma_a = \frac{PR}{100\sqrt{3}}$$
$$\sigma_a = 0.346 \text{ mA} \doteq 0.3 \text{ mA}$$

Výsledek měření analogovým ampérmetrem zapíšeme v následujícím tvaru.

$$I_a = (45.5 \pm 0.3) \text{ mA}$$

(b) Digitální voltmetr s 8-bitovým A-D převodníkem převede proud I_0 na binární hodnotu z intervalu od 0 do 255.

$$I_{0,digit} = \frac{I_0}{I_{max}} \cdot 256$$
$$I_{0,digit} = \frac{45.63 \text{ mA}}{100 \text{ mA}} \doteq 116.7$$

Digitalizovaná hodnota proudu $I_{0,digit}$ bude tedy ležet v binu s krajními hodnotami 116 až 117. Předpokládejme, že při ukládání digitalizované hodnoty, A-D převodník zaokrouhluje *směrem dolů*, tzn. zapíše číslo $I_{b,digit} = 116$. Příslušná maximální chyba $\Delta_{b,digit.}$ takového převodu je rovna šířce 1 binu, tedy $\Delta_{b,digit.} = 1$. Nyní si zpětně převedeme čísla $I_{b,digit}$ a $\Delta_{b,digit.}$ na hodnoty elektrického proudu.

$$I_b = \frac{I_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$I_b = \frac{116}{256} \cdot 100 \text{ mA} = 45.313 \text{ mA} \doteq 45.3 \text{ mA}$$

$$\Delta_b = \frac{\Delta_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$\Delta_b = \frac{1}{256} \cdot 100 \text{ mA} = 0.391 \text{ mA}$$

Systematickou chybu měření digitálním ampérmetrem získáme vydělením maximální chyby Δ_b odmocninou ze 3.

$$\sigma_b = \frac{\Delta_b}{\sqrt{3}}$$
$$\sigma_b = 0.226 \text{ mA} \doteq 0.2 \text{ mA}$$

Výsledek měření digitálním ampérmetrem zapíšeme v následujícím tvaru.

$$I_b = (45.3 \pm 0.2) \text{ mA}$$

Poznámka 1: Ekvivalentně můžeme předpokládat, že A-D převodník zaokrouhluje *směrem nahoru*, tz. zapíše číslo $I'_{b,digit} = 117$, zatímco maximální chyba a tudíž i systematická chyba zůstává stejná. Při zpětném převedení čísel $I'_{b,digit}$ a $\Delta_{b,digit.}$ na hodnoty elektrického proudu dostáváme výsledek v pozměněném tvaru, který také můžeme považovat za správný.

$$I'_b = \frac{I'_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$I'_b = \frac{117}{256} \cdot 100 \text{ mA} = 45.703 \text{ mA} \doteq 45.7 \text{ mA}$$

$$\Delta_b = \frac{\Delta_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$\Delta_b = \frac{1}{256} \cdot 100 \text{ mA} = 0.391 \text{ mA}$$

$$\sigma_b = \frac{\Delta_b}{\sqrt{3}}$$
$$\sigma_b = 0.226 \text{ mA} \doteq 0.2 \text{ mA}$$

$$I'_b = (45.7 \pm 0.2) \text{ mA}$$

Poznámka 2: Vzhledem k tomu, že neznáme konkrétní způsob, jak A-D převodník ukládá hodnotu z intervalu čísel 116 − 117, můžeme předpokládat, že tato hodnota je *náhodnou proměnnou s rovnoměrným rozdělením* v tomto intervalu. Očekávanou hodnotou je potom průměrná hodnota $I''_{b,digit} = 116.5$ a standardní odchylka je $\sigma''_{b,digit} = \frac{1}{\sqrt{12}}$, což odpovídá maximální chybě rovné polovině šířky 1 binu. Při zpětném převedení čísel na hodnoty elektrického proudu dostáváme výsledek ve tvaru, který lze rovněž uznat jako správný.

$$I''_b = \frac{I''_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$I''_b = \frac{116.5}{256} \cdot 100 \text{ mA} = 45.508 \text{ mA} \doteq 45.5 \text{ mA}$$

$$\sigma''_b = \frac{\sigma''_{b,digit}}{256} I_{max}$$
$$\sigma''_b = \frac{1}{\sqrt{12} \cdot 256} \cdot 100 \text{ mA} = 0.113 \text{ mA} \doteq 0.1\text{mA}$$

$$I''_b = (45.5 \pm 0.1) \text{ mA}$$

Příklad 2a - statistika dopravních nehod v ČR

Zadání:
Z veřejně dostupné databáze MVČR lze vyčíst počet obětí dopravních nehod v Praze za posledních 11 let, která je uvedena v tabulce níže.
(a) Jaká je očekávaná hodnota počtu obětí dopravních nehod v roce 2023?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že v roce 2023 zemře na českých silnicích méně než 20 lidí?

rok	počet obětí
2012	26
2013	29
2014	20
2015	25
2016	21
2017	17
2018	31
2019	20
2020	22
2021	22
2022	17

Poznámka: Jakékoli trendy zvyšování nebo snižování počtu obětí v průběhu let neuvažujeme. Výslednou pravděpodobnost zaokrouhlete na desetiny %.

(5 bodů)

Řešení:
Průměrný počet obětí za rok v letech 2012 - 2022 je:

$$\nu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$$

$$\nu = \frac{1}{11}\left(26 + 29 + 20 + 25 + 21 + 17 + 31 + 20 + 22 + 22 + 17\right)$$

$$\nu = \frac{250}{11} \doteq 22.73$$

Počet obětí k v příštích letech budeme považovat za náhodnou proměnnou s Poissonovým rozdělením $P(k|\nu)$.

$$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}$$

Pravděpodobnost, že v roce 2023 bude obětí méně než 20 je rovna součtu pravděpodobností $P(k|\nu)$ pro $k = 0$ až 19.

$$
\begin{aligned}
P(0|\nu) &= \frac{\nu^0}{0!}e^{-\nu} \doteq 10^{-10} \\
P(1|\nu) &= \frac{\nu^1}{1!}e^{-\nu} \doteq 3 \times 10^{-9} \\
P(2|\nu) &= \frac{\nu^2}{2!}e^{-\nu} \doteq 3 \times 10^{-8} \\
P(3|\nu) &= \frac{\nu^3}{3!}e^{-\nu} \doteq 3 \times 10^{-7} \\
P(4|\nu) &= \frac{\nu^4}{4!}e^{-\nu} \doteq 1 \times 10^{-6} \\
P(5|\nu) &= \frac{\nu^5}{5!}e^{-\nu} \doteq 7 \times 10^{-6} \\
P(6|\nu) &= \frac{\nu^6}{6!}e^{-\nu} \doteq 0.00003 \\
P(7|\nu) &= \frac{\nu^7}{7!}e^{-\nu} \doteq 0.00008 \\
P(8|\nu) &= \frac{\nu^8}{8!}e^{-\nu} \doteq 0.00024 \\
P(9|\nu) &= \frac{\nu^9}{9!}e^{-\nu} \doteq 0.00060 \\
P(10|\nu) &= \frac{\nu^{10}}{10!}e^{-\nu} \doteq 0.00137 \\
P(11|\nu) &= \frac{\nu^{11}}{11!}e^{-\nu} \doteq 0.00282 \\
P(12|\nu) &= \frac{\nu^{12}}{12!}e^{-\nu} \doteq 0.00534 \\
P(13|\nu) &= \frac{\nu^{13}}{13!}e^{-\nu} \doteq 0.00934 \\
P(14|\nu) &= \frac{\nu^{14}}{14!}e^{-\nu} \doteq 0.01517 \\
P(15|\nu) &= \frac{\nu^{15}}{15!}e^{-\nu} \doteq 0.02298 \\
P(16|\nu) &= \frac{\nu^{16}}{16!}e^{-\nu} \doteq 0.03264 \\
P(17|\nu) &= \frac{\nu^{17}}{17!}e^{-\nu} \doteq 0.04364 \\
P(18|\nu) &= \frac{\nu^{18}}{18!}e^{-\nu} \doteq 0.05510 \\
P(19|\nu) &= \frac{\nu^{19}}{19!}e^{-\nu} \doteq 0.06591
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(k < 20) &= \sum_{k=0}^{19} P(k|\nu) \\
P(k < 20) &= 0.25529 \doteq 0.255 \\
P(k < 20) &\doteq 25.5~\%
\end{aligned}
$$

Počet obětí dopravních nehod v roce 2023 bude menší než 20 s pravděpodobností 25.5 %.

Příklad 1b - Rozpad jader $^{22}_{11}\mathrm{Na}$

Zadání:
Jádro radionuklidu $^{22}_{11}\mathrm{Na}$ se rozpadá na stabilní jádro $^{22}_{10}\mathrm{Ne}$:

- v 90.4% případů je při rozpadu vyzářen pozitron e^+, foton γ a elektronové neutrino ν_e (užitečná emise pozitronu),
- v 9.5% případů je při rozpadu vyzářen pouze foton γ a elektronové neutrino ν_e (bez emise pozitronu),
- v 0.1% případů je při rozpadu vyzářen pouze pozitron e^+ a elektronové neutrino ν_e (neužitečná emise pozitronu).

(a) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, bude nejméně 8 provázených užitečnou emisí pozitronu?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, bude vyzářeno právě 8 pozitronů?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů, nebude ani jeden bez emise pozitronu?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 rozpadů provázených emisí pozitronu, bude právě 1 neužitečný?

Poznámka: Výsledné pravděpodobnosti zaokrouhlete na desetiny %.

(10 bodů)

Řešení:
Nejprve si označme po řadě pravděpodobnosti $p_1 = 0.904$, $p_2 = 0.095$ a $p_3 = 0.001$ pro jednotlivé možnosti.
Obecně pravděpodobnost k úspěchů z N pokusů udává binomické rozdělení $P(k|N,p)$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

(a) Pravděpodobnost nejméně 8 úspěchů (užitečná emise pozitronu, $p = p_1$) z 10 pokusů (rozpadů) je rovna součtu pravděpodobností pro 10, 9 a 8 úspěchů.

$$P_{(a)} = \binom{10}{10} p_1^{10} + \binom{10}{9} p_1^9 (1-p_1) + \binom{10}{8} p_1^8 (1-p_1)^2$$
$$P_{(a)} = 0.904^{10} + 10 \times 0.904^9 \times 0.096 + 45 \times 0.904^8 \times 0.096^2$$

$$P_{(a)} \doteq 0.937 = 93.7\%$$

(b) Elementární událost vyzáření pozitronu nastane jak v prvním užitečném tak i ve třetím neužitečném případě. Pravděpodobnost úspěchu je tím pádem $p = p_1 + p_3$ a pravděpodobnost 8 úspěchů z 10 pokusů (rozpadů) je:

$$P_{(b)} = \binom{10}{8} (p_1 + p_3)^8 (1 - p_1 - p_3)^2$$
$$P_{(b)} = 45 \times 0.905^8 \times 0.095^2$$
$$P_{(b)} \doteq 0.183 = 18.3\%$$

(c) Elementární událost rozpadu bez vyzáření pozitronu odpovídá druhému případu s pravděpodobností $p = p_2$. Pravděpodobnost žádného úspěchu z 10 pokusů (rozpadů) je:

$$P_{(c)} = \binom{10}{0} (1 - p_2)^{10}$$
$$P_{(c)} = 0.905^{10}$$
$$P_{(c)} \doteq 0.369 = 36.9\%$$

(d) Pokud budeme uvažovat pouze rozpady doprovázené emisí pozitronu, je nutné zavést nové pravděpodobnosti p_1' a p_3' pro užitečný a neužitečný případ, jejichž součet bude roven 1.

$$\begin{aligned} p_1' &= K p_1 \\ p_3' &= K p_3 \\ p_1' + p_3' &= 1 \\ K &= \frac{1}{p_1 + p_3} \\ p_1' &= \frac{p_1}{p_1 + p_3} = \frac{0.904}{0.905} \\ p_3' &= \frac{p_3}{p_1 + p_3} = \frac{0.001}{0.905} \end{aligned}$$

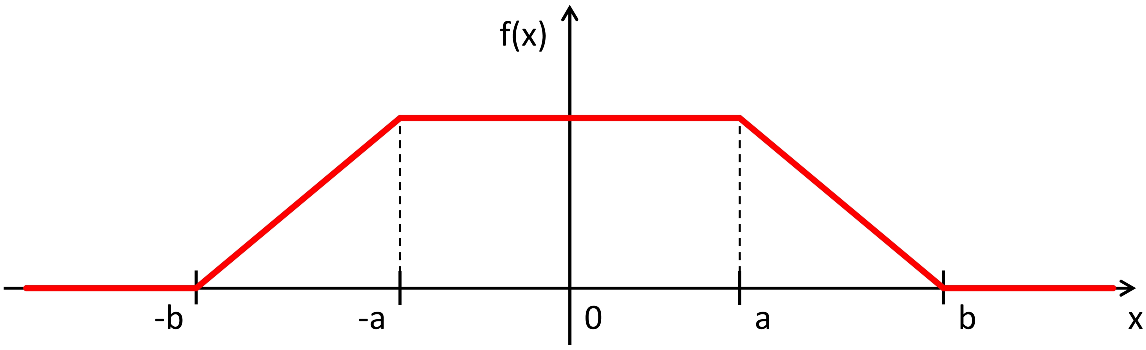
Pravděpodobnost právě jednoho úspěchu z 10 pokusů (rozpadů s emisí pozitronu) je potom:

$$P_{(d)} = \binom{10}{1} (p_3')^1 (1 - p_3')^9$$
$$P_{(d)} = 10 \times \frac{0.001}{0.905} \times \left(\frac{0.904}{0.905}\right)^9$$
$$P_{(d)} \doteq 0.011 = 1.1\%$$

Příklad 2b - lichoběžníková hustota pravděpodobnosti

Zadání:
Na obrázku je znázorněna hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné x, která má předpis:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < -b \\ \frac{x+b}{b^2-a^2} & \text{pro } x \in [-b, -a] \\ \frac{1}{a+b} & \text{pro } x \in [-a, a] \\ \frac{-x+b}{b^2-a^2} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pro } x > b \end{cases}$$



(a) Vypočítejte standardní odchylku σ náhodné proměnné x.
(b) Jaký musí být vztah mezi parametry a, b, aby platilo $\sigma = a$.

Poznámka: Ze symetrie funkce $f(x)$ okamžitě plyne, že její očekávaná hodnota je nulová: $E[x] = 0$.

(5 bodů)

Řešení:
Standardní odchylku σ spočítáme jako odmocninu z rozptylu $V[x]$. Díky tomu, že je očekávaná hodnota nulová, můžeme počítat $V[x] = E[x^2]$. Počítáme tedy následující určitý integrál.

$$\sigma^2 = V[x]$$
$$\sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] = E[x^2] - (E[x])^2$$
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = &\int_{-b}^{-a} x^2 \frac{x+b}{b^2-a^2}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{-a}^{a} x^2 \frac{1}{a+b}\,\mathrm{d}x \\
&+ \int_{a}^{b} x^2 \frac{-x+b}{b^2-a^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = &\frac{1}{b^2-a^2}\int_{-b}^{-a} \left(x^3+bx^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{a+b}\int_{-a}^{a} x^2\,\mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{b^2-a^2}\int_{a}^{b} \left(-x^3+bx^2\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = &\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{-a} \\
&+ \frac{1}{a+b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} \\
&+ \frac{1}{b^2-a^2}\left[-\frac{x^4}{4}+b\frac{x^3}{3}\right]_{a}^{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = &\frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{a^4}{4}-\frac{a^3b}{3}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^4}{3}\right) \\
&+ \frac{b-a}{b^2-a^2}\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{3}\right) \\
&+ \frac{1}{b^2-a^2}\left(-\frac{b^4}{4}+\frac{b^4}{3}+\frac{a^4}{4}-\frac{a^3b}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\sigma^2 = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{a^4}{2}-\frac{2a^3b}{3}-\frac{b^4}{2}+\frac{2b^4}{3}+\frac{2a^3b}{3}-\frac{2a^4}{3}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{6}b^4-\frac{1}{6}a^4\right) \\
\sigma^2 &= \frac{1}{6}\frac{b^4-a^4}{b^2-a^2} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{6}\frac{\left(b^2+a^2\right)\left(b^2-a^2\right)}{b^2-a^2} \\
\sigma^2 &= \frac{1}{6}\left(b^2+a^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{6}}
$$

Pokud má platit rovnost $\sigma = a$, potom:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \frac{1}{6}\left(b^2 + a^2\right) \\
\frac{5}{6}a^2 &= \frac{1}{6}b^2 \\
a &= \frac{\sqrt{5}}{5}b \\
b &= \sqrt{5}a
\end{aligned}
$$

Poznámka: Parametr b udává maximální chybu Δ, tj. maximální šířku intervalu hodnot $\pm\Delta$, kterých může nabývat náhodná proměnná x. Parametr a udává standardní chybu σ. Vztah mezi oběma veličinami je $\Delta = \sqrt{5}\sigma$. Pravděpodobnost, že náhodná proměnná x leží v intervalu jedné standardní odchylky $\pm\sigma$ je dána obsahem obdélníku o stranách 2σ a $\frac{1}{\Delta+\sigma}$.

$$
\begin{aligned}
P\left[x \in (-\sigma, \sigma)\right] &= 2\sigma\frac{1}{\Delta + \sigma} \\
P\left[x \in (-\sigma, \sigma)\right] &= 2\sigma\frac{1}{\sqrt{5}\sigma + \sigma} \\
P\left[x \in (-\sigma, \sigma)\right] &= \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \\
P\left[x \in (-\sigma, \sigma)\right] &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Tato pravděpodobnost je tedy rovna převrácené hodnotě **zlatého řezu**.