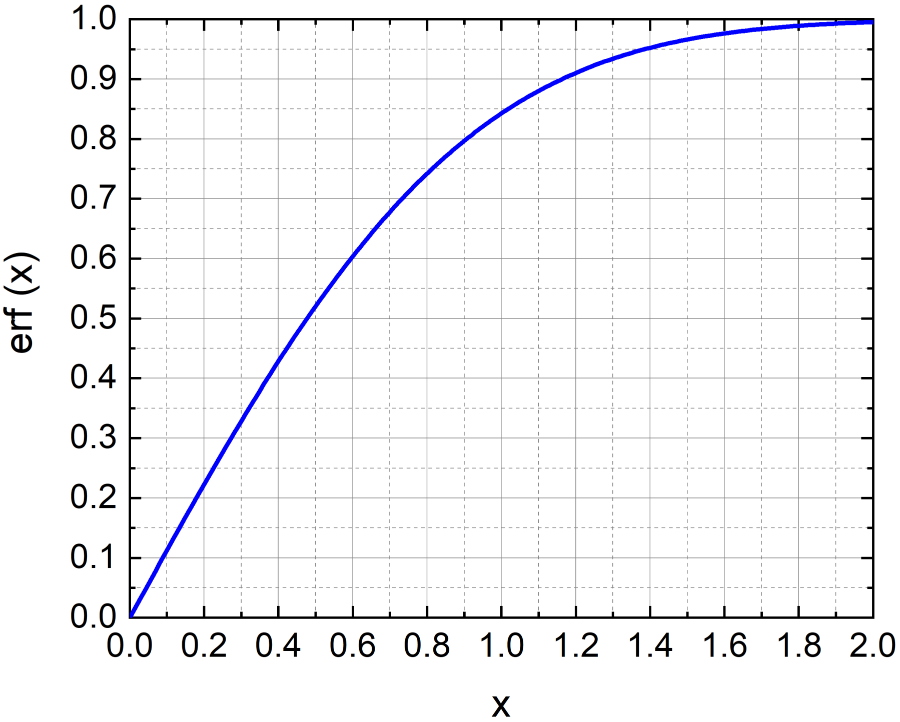
Příklad 1 - normální rozdělení $\sigma_{0.9}$ kritérium

Zadání:
Uvažujme standardní normální rozdělení $N(0,1)$. Definujme $\sigma_{0.9}$ kritérium jako podmínku pro pravděpodobnost $P\{x \in [-\sigma_{0.9}, +\sigma_{0.9}]\} = 0.9$ neboli v intervalu $\pm\sigma_{0.9}$ v okolí očekávané hodnoty se nachází 90% naměřených hodnot náhodné proměnné x.

(a) Vypočítejte hodnotu parametru $\sigma_{0.9}$. K výpočtu využijte hodnoty error funkce, jejíž graf je zobrazený na obrázku.
(b) S jakou přesností (ve smyslu maximální chyby) je určena hodnota $\sigma_{0.9}$?
(c) Zapište výsledek ve správném tvaru pomocí očekávané hodnoty a standardní odchylky veličiny $\sigma_{0.9}$).



Poznámka: Rozmyslete si, s jakou přesností odečítáte z grafu erf(x) hodnoty náhodné proměnné x; neboli $x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$.

(10 bodů)

Řešení:
(a) Pravděpodobnost, že náhodná proměnná x bude ležet v intervalu $\pm\sigma_{0.9}$ můžeme obecně vyjádřit pomocí distribuční funkce $F(x)$.

$$\begin{aligned} P\{x \in [-\sigma_{0.9}, \sigma_{0.9}]\} &= F(\sigma_{0.9}) - F(-\sigma_{0.9}) \\ &= F(\sigma_{0.9}) - [1 - F(\sigma_{0.9})] \\ &= 2F(\sigma_{0.9}) - 1, \end{aligned}$$

kde jsme využili symetrie distribuční funkce $F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$ pro libovolné x. Dosaďme za $F(x)$ známou distribuční funkci standardního normálního rozdělení.

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Počítejme s pravděpodobností $P = 0.9$.

$$\begin{aligned} 0.9 &= 2F(\sigma_{0.9}) - 1 \\ 0.9 &= \operatorname{erf}\left(\frac{\sigma_{0.9}}{\sqrt{2}}\right) \\ 0.9 &= \operatorname{erf}(y) \end{aligned}$$

Z obrázku ze zadání vidíme, že funkce $\operatorname{erf}(y)$ nabývá hodnoty 0.9 v intervalu $y \in (1.1, 1.2)$. Jako očekávanou hodnotu y zvolme střední hodnotu tohoto intervalu, neboli $\bar{y} = 1.15$ a dosaďme ji do poslední rovnice.

$$\begin{aligned} 0.9 &\approx \operatorname{erf}(\bar{y}) \\ \bar{y} &= \frac{\sigma_{0.9}}{\sqrt{2}} \\ \sigma_{0.9} &= \sqrt{2}\bar{y} \\ \sigma_{0.9} &= 1.626 \end{aligned}$$

(b) Hodnotu $\bar{y}$ jsme odhadli s maximální chybou $\varepsilon_y = 0.05$. Maximální chybu $\varepsilon_{\sigma_{0.9}}$ veličiny $\sigma_{0.9}$ vypočítáme jako:

$$\varepsilon_{\sigma_{0.9}} = \sqrt{2}\varepsilon_y = 0.0707$$

Vydělením $\sqrt{3}$ dostaneme standardní odchylku σ_σ:

$$\varepsilon_{\sigma_{0.9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\varepsilon_y \doteq 0.04$$

Veličinu $\sigma_{0.9}$ tedy známe s přesností na setiny.

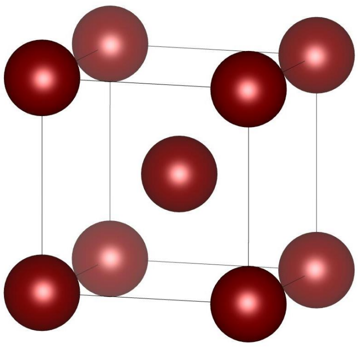
(c) Hodnotu $\sigma_{0.9}$ zaokrouhlíme na setiny podle standardní odchylky a zapíšeme výsledek.

$$\sigma_{0.9} = (1.63 \pm 0.04)$$

Poznamenejme, že přesná hodnota spočítaná pomocí znalosti inverzní funkce k error funkci erf^{-1} je $\sigma_{0.9} = 1.645$.

Příklad 2 - nejbližší okolí atomu Fe

Zadání:
Železo za normálních podmínek krystalizuje v kubické prostorově centrované soustavě, tzn. každý atom železa má v nejbližším okolí osm jiných atomů železa, viz obrázek.



Přirozené zastoupení izotopu ^{57}Fe je 2.119%, zbylých 97.881% připadá na ostatní stabilní izotopy železa, zejména ^{56}Fe a ^{54}Fe. Vypočítejte pravděpodobnost, že daný atom železa (nezávisle na izotopu) má ve svém nejbližším okolí právě dva atomy izotopu ^{57}Fe. Jaká je pravděpodobnost, že bude mít alespoň jeden atom izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí?

(5 bodů)

Řešení:
Pravděpodobnost, že z 8 atomů železa (počet pokusů N) jich je právě k izotop ^{57}Fe (úspěch), udává binomické rozdělení $P(k|N,p)$ s $p = 0.02119$.

$$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Pravděpodobnost právě 2 atomů izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí je:

$$P(2) = \binom{8}{2} p^2 (1-p)^6$$
$$P(2) = 28 \times 0.02119^2 \times (1 - 0.02119)^6$$
$$P(2) \doteq 0.011 = 1.1\%$$

Pravděpodobnost nejméně jednoho atomu izotopu ^{57}Fe v nejbližším okolí je doplňkem k případu, kdy v nejbližším okolí není žádný takový atom.

$$P(k \geq 1) = 1 - P(0)$$
$$P(k \geq 1) = 1 - \binom{8}{0} (1-p)^8$$
$$P(k \geq 1) = 1 - (1 - 0.02119)^8$$
$$P(k \geq 1) \doteq 0.157 = 15.7\%$$