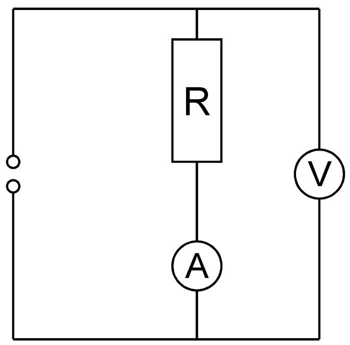
Příklad 1 - Měření odporu přímou metodou

Zadání:
Rezistor o neznámém odporu R připojíme ke zdroji napětí, voltmetru a ampérmetru podle schématu na obrázku. Známé vnitřní odpory voltmetru a ampérmetru jsou $R_V = (1.65 \pm 0.03)\ \Omega$ a $R_A = (2.02 \pm 0.02)\ \Omega$.



Digitální voltmetr má 4-místný displej a ukazuje hodnotu 24.82 V, na měřeném rozsahu uvádí výrobce přesnost $\pm(0.3\% + 1)$. Ručička ampérmetru ukazuje hodnotu 0.89 A, třída přesnosti ampérmetru je 2 a použitý rozsah stupnice je 1.5 A.

(a) Vypočítejte standardní odchylku měření elektrického napětí U a proudu I. Výsledky měření zapište ve správném tvaru.

(b) Odvoďte obecný vztah pro výpočet odporu R pomocí veličin uvedených v zadání.

(c) Vypočítejte očekávanou hodnotu a chybu měření odporu R. Výsledek zapište ve správném tvaru.

Poznámka: Při výpočtu úloh (b) a (c) použijte výsledné hodnoty z úlohy (a).

(10 bodů)

Řešení:
(a) Pro digitální voltmetr je maximální chyba měření napětí ε_U dána součtem 0.3%-násobku naměřené hodnoty a 1-násobku řádu poslední platné číslice, tj. jedné setiny V.

$$\varepsilon_U = 0.003 \times 24.82\ \text{V} + 1 \times 0.01\ \text{V} = 0.08446\ \text{V}$$

Pro analogový ampérmetr s třídou přesnosti $P = 2$ a rozsahem $R = 1.5$ A je maximální chyba měření proudu ε_I dána jako:

$$\varepsilon_I = \frac{PR}{100} = 0.03\ \text{A}.$$

Standardní odchylky σ_U a σ_I vypočítáme tak, že vydělíme maximální chyby $\sqrt{3}$.

$$\sigma_U = \frac{\varepsilon_U}{\sqrt{3}} \doteq 0.05\ \mathrm{V}$$
$$\sigma_I = \frac{\varepsilon_I}{\sqrt{3}} \doteq 0.02\ \mathrm{A}$$

Obě veličiny tedy známe s přesností na setiny, naměřené hodnoty není tudíž nutné dále zaokrouhlovat. Výsledky měření napětí a proudu zapíšeme následovně.

$$U = (24.82 \pm 0.05)\ \mathrm{V}$$
$$I = (0.89 \pm 0.02)\ \mathrm{A}$$

(b) V daném zapojení měří ampérmetr přímo proud procházející rezistorem, zatímco voltmetr měří napětí na rezistoru plus napětí na samotném ampérmetru. Podíl napětí a proudu je potom roven součtu odporu rezistoru R a odporu ampérmetru R_A.

$$\frac{U}{I} = R + R_A$$
$$R = \frac{U}{I} - R_A$$

(c) Maximální chyba odporu R je rovna součtu maximální chyby podílu U/I a maximální chyby odporu ampérmetru.

$$\varepsilon_R = \frac{U\varepsilon_I + I\varepsilon_U}{I^2} + \varepsilon_{R_A}$$

Vydělením této rovnice $\sqrt{3}$ dostaneme stejný vztah i pro standardní odchylky.

$$\sigma_R = \frac{U\sigma_I + I\sigma_U}{I^2} + \sigma_{R_A}$$

$$\sigma_R = \frac{24.82\ \mathrm{V} \times 0.02\ \mathrm{A} + 0.89\ \mathrm{A} \times 0.05\ \mathrm{V}}{(0.89\ \mathrm{A})^2} + 0.02\ \Omega \doteq 0.7\ \Omega$$

Nakonec dopočítáme odpor R, zaokrouhlíme ho podle odchylky σ_R na desetiny Ω a zapíšeme výsledek.

$$R = \frac{U}{I} - R_A$$
$$R = \frac{24.82\ \mathrm{V}}{0.89\ \mathrm{V}} - 2.02\ \Omega$$
$$R \doteq 25.9\ \Omega$$
$$R = (25.9 \pm 0.7)\ \Omega$$

Příklad 2 - Geigerův-Müllerův počítač

Zadání:
Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia obsahujícího izotop ^{137}Cs naměřil během deseti minut 7 200 událostí (rozpadů β^-). Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy detekuje právě 8 událostí. Jaká je pravděpodobnost, že během dvou sekund detekuje právě 16 událostí?

Poznámka: Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

(5 bodů)

Řešení:
Počet k naměřených událostí za zvolený časový úsek je určen Poissonovým rozdělením $P(k|\nu)$ s očekávanou hodnotou ν.

$$P(k|\nu) = e^{-\nu}\frac{\nu^k}{k!}$$

Za jednu sekundu detektor naměří v průměru $\nu = 12$ událostí. Pravděpodobnost detekce 8 událostí za 1 sekundu je tedy:

$$P(8|1\text{ s}) = e^{-12}\frac{12^8}{8!}$$
$$P(8|1\text{ s}) \doteq 0.066 = 6.6\%$$

Za dvě sekundy detektor naměří v průměru $\nu = 24$ událostí. Pravděpodobnost detekce 16 událostí za 2 sekundy je tedy:

$$P(16|2\text{ s}) = e^{-24}\frac{24^{16}}{16!}$$
$$P(16|2\text{ s}) \doteq 0.022 = 2.2\%$$

Poznámka: Neplatí tedy zdánlivě správná představa, že pravděpodobnost detekce dvojnásobného množství událostí za dvojnásobný čas je stejná jako pravděpodobnost původní. Důvodem je, že náhodná proměnná - počet detekovaných událostí - nabývá pouze diskrétních hodnot. Ve druhém případě nabývá dvojnásobného množství možných výsledků, tudíž zmíněné pravděpodobnosti z principu nemohou být stejné.
Např. detekce 16 událostí za 2 sekundy má analogii v detekci 8 událostí za 1 sekundu. Na druhou stranu detekce lichého počtu událostí za 2 sekundy takovou analogii nemá.