Přenos chyb

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $E[x_i] = \mu_i$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
- výsledná veličina $y(\boldsymbol{x}) = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $V_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j)$
- Taylorův rozvoj $y(\boldsymbol{x}) \approx y(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)$
- **očekávaná hodnota** $\boxed{E[y(\boldsymbol{x})] \approx y(\boldsymbol{\mu})}$

Přenos chyb

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $E[x_i] = \mu_i$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
- výsledná veličina $y(\boldsymbol{x}) = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $V_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j)$
- Taylorův rozvoj $$y(\boldsymbol{x}) \approx y(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i)$$
- **rozptyl** $V[y(\boldsymbol{x})] = E[y^2(\boldsymbol{x})] - (E[y(\boldsymbol{x})])^2$

$$y^2(\boldsymbol{x}) \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + 2y(\boldsymbol{\mu}) \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_i - \mu_i) \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} (x_j - \mu_j)$$

$$E[y^2(\boldsymbol{x})] \approx y^2(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j)$$

$$\boxed{V[y(\boldsymbol{x})] \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \left.\frac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \mathrm{cov}(x_i, x_j)}$$

Přenos chyb – nezávislé náhodné proměnné

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $E[x_i] = \mu_i$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$
- výsledná veličina $y(\boldsymbol{x}) = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $V_{ij} = \mathrm{cov}(x_i, x_j)$
- nezávislé proměnné $\mathrm{cov}(x_i, x_j) = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$
- **očekávaná hodnota** $E[y(\boldsymbol{x})] \approx y(\boldsymbol{\mu})$
- **rozptyl** $V[y(\boldsymbol{x})] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}} \sigma_i \right)^2$

Přenos chyb – součet náhodných proměnných

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$
- výsledná veličina $y(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$

1. nezávislé (nekorelované) proměnné

   očekávaná hodnota $E[y(\boldsymbol{x})] = \mu_1 + \mu_2$

   rozptyl $V[y(\boldsymbol{x})] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

2. závislé (korelované) proměnné

   očekávaná hodnota $E[y(\boldsymbol{x})] = \mu_1 + \mu_2$

   rozptyl $V[y(\boldsymbol{x})] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\mathrm{cov}(x_1, x_2)$

Přenos chyb – aritmetický průměr

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$

- výsledná veličina $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- nezávislé proměnné

  očekávaná hodnota $$E[\bar{x}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

  rozptyl $$V[\bar{x}] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

- všechny σ_i stejné: $\sigma_i = \sigma \quad \Rightarrow \quad V[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}$

chyba aritmetického průměru $$\boxed{\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Přenos chyb – aritmetický průměr

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

5.5287
4.3908
5.7634
5.5533
5.2602
5.1191
4.7564

- odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5.196$

- předpojatý odhad rozptylu 1 náhodné proměnné $\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.449$

- nepředpojatý odhad rozptylu 1 náhodné proměnné $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.485$

- odhad chyby aritmetického průměru $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 0.183$

Přenos chyb – aritmetický průměr

- náhodné proměnné $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

5.5287
4.3908
5.7634
5.5533
5.2602
5.1191
4.7564

- odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5.196$

- odhad chyby aritmetického průměru $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = 0.183$

- průměrný výsledek měření $\boxed{(\bar{x} \pm \hat{\sigma}_{\bar{x}}) = 5.2 \pm 0.2}$

Přenos chyb - příklady

- nezávislé náhodné proměnné

- součet / rozdíl

$$y = a + b$$

$$y = a - b$$

$$\boxed{\sigma_y = \sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

- součin/podíl

$$y = a \cdot b$$

$$y = a/b$$

$$\boxed{\frac{\sigma_y}{y} = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_b^2}{b^2}}}$$

- mocnina

$$y = a^n$$

$$\boxed{\frac{\sigma_y}{y} = n\frac{\sigma_a}{a}}$$