Rovnoměrné rozdělení

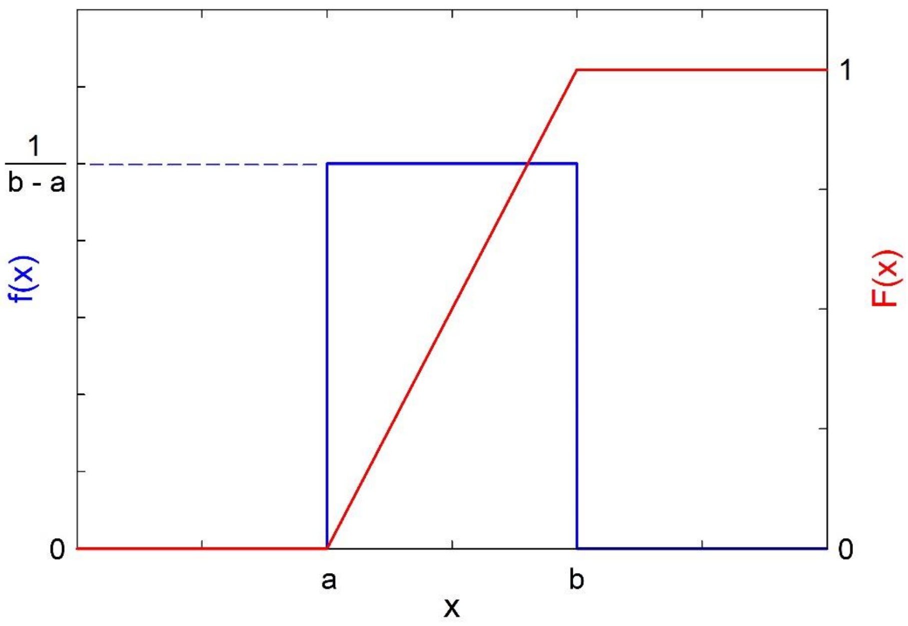
Rovnoměrné rozdělení $U\ (a,b)$

- náhodná proměnná se vyskytuje všude v intervalu $[a,b]$ se stejnou pravděpodobností, mimo tento interval se nevyskytuje nikdy
- hustota pravděpodobnosti

$$f(x|a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in [a,b] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- distribuční funkce

$$F(x|a,b) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in [a,b] \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases}$$



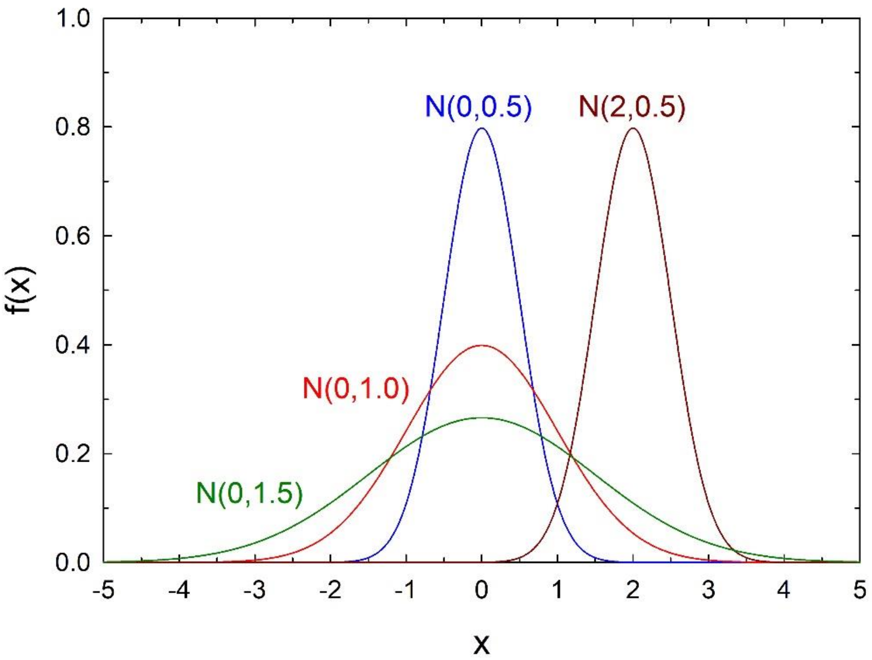
$$E[x] \equiv \mu = \frac{a+b}{2} \qquad V[x] \equiv \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Jednorozměrné Gaussovo rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- hustota pravděpodobnosti

$$\boxed{f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$



$$E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \mu$$

$$V[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \sigma^2$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Jednorozměrné Gaussovo rozdělení $N(\mu, \sigma)$

- distribuční funkce

$$F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t$$

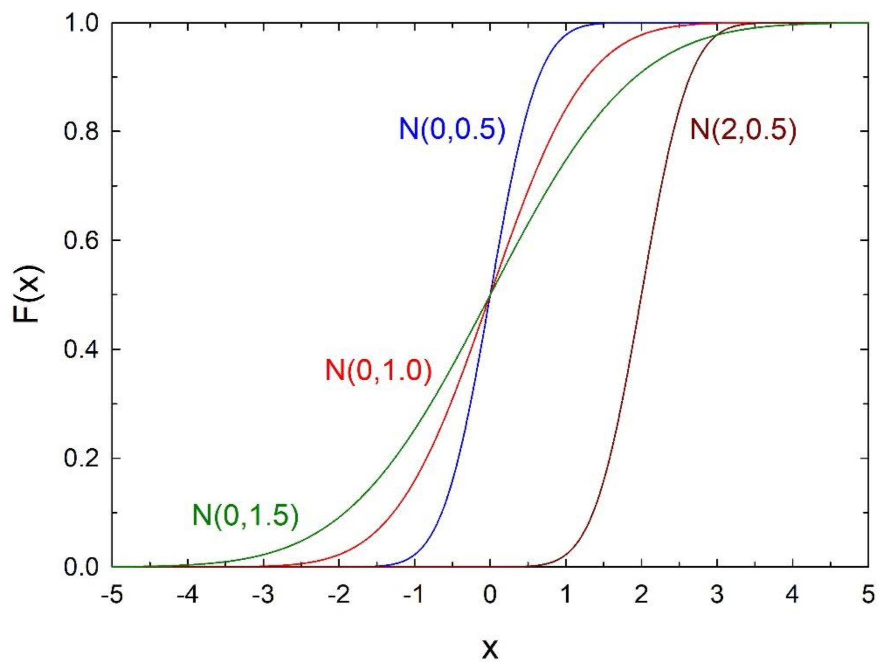
- error funkce

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

$$F(x|0,1) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$F(x|\mu,\sigma) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\middle| 0,1\right)$$

$$\boxed{F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]}$$



výpočet error funkce:

Excel	`erf(x)`
ROOT	`ROOT::Math::erf(x)`
Matlab	`erf(x)`
Gnuplot	`erf(x)`
Python	`from scipy import special` `special.erf(x)`

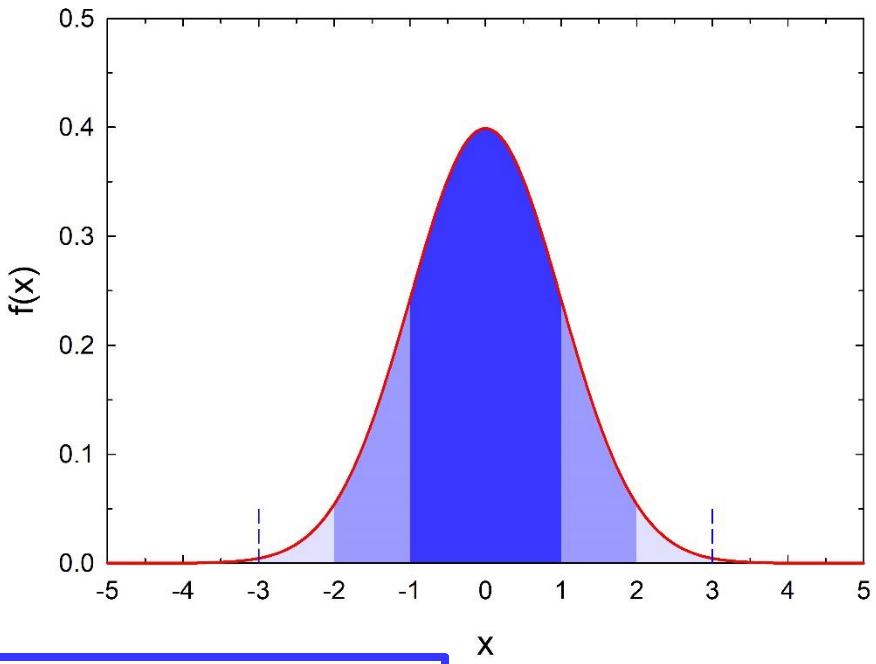
Standardní Gaussovo rozdělení

Standardní Gaussovo rozdělení $N(\mu,\sigma) \to N(0,1)$

$$N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$y \equiv \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Rightarrow N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$



$$\boxed{P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = F(\mu+\sigma|\mu,\sigma) - F(\mu-\sigma|\mu,\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683}$$

$$\boxed{P(\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma) = F(\mu+2\sigma|\mu,\sigma) - F(\mu-2\sigma|\mu,\sigma) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{2}\right) = 0.955}$$

$$\boxed{P(\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma) = F(\mu+3\sigma|\mu,\sigma) - F(\mu-3\sigma|\mu,\sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.997}$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Normální (Gaussovo) rozdělení $N(\mu, \sigma)$

Zápisem výsledku měření ve tvaru $x = \left(\hat{\mu}_x \pm \sigma_{C,x}\right)\,[x]$

implicitně předpokládáme, že náhodná proměnná x má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$

tj. $P\left(x \in \left[\hat{\mu}_x - \sigma_{C,x}, \hat{\mu}_x + \sigma_{C,x}\right]\right) \approx 0.683.$

- 1-sigma kritérium:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma|\mu, \sigma) - F(\mu - \sigma|\mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0.683$$

- 2-sigma kritérium:

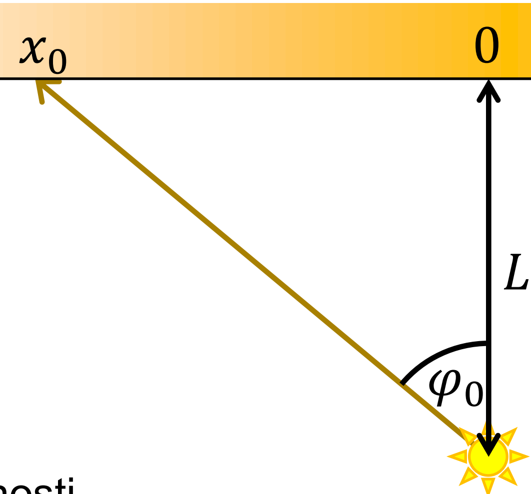
$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma|\mu, \sigma) - F(\mu - 2\sigma|\mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\sqrt{2}\right) = 0.955$$

- 3-sigma kritérium:

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma|\mu, \sigma) - F(\mu - 3\sigma|\mu, \sigma) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0.997$$

Cauchyho rozdělení

- Jaká je hustota pravděpodobnosti počtu fotonů dopadajících na stínítko ve vzdálenosti L?



náhodná proměnná φ

- rovnoměrné rozdělení

$$\varphi \in U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- hustota pravděpodobnosti

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 1$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}$$

náhodná proměnná x

$$x = L\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{L}\right)$$

- pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(x \in [x_0, x_0 + \mathrm{d}x]) &= P(\varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \mathrm{d}\varphi]) \\ g(x_0)\mathrm{d}x &= f\big(\varphi(x_0)\big)\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

- hustota pravděpodobnosti

$$g(x) = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right| f\big(\varphi(x)\big)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{\pi}\frac{L}{L^2 + x^2}}$$

Cauchyho rozdělení

Cauchyho rozdělení $C(x_0, L)$

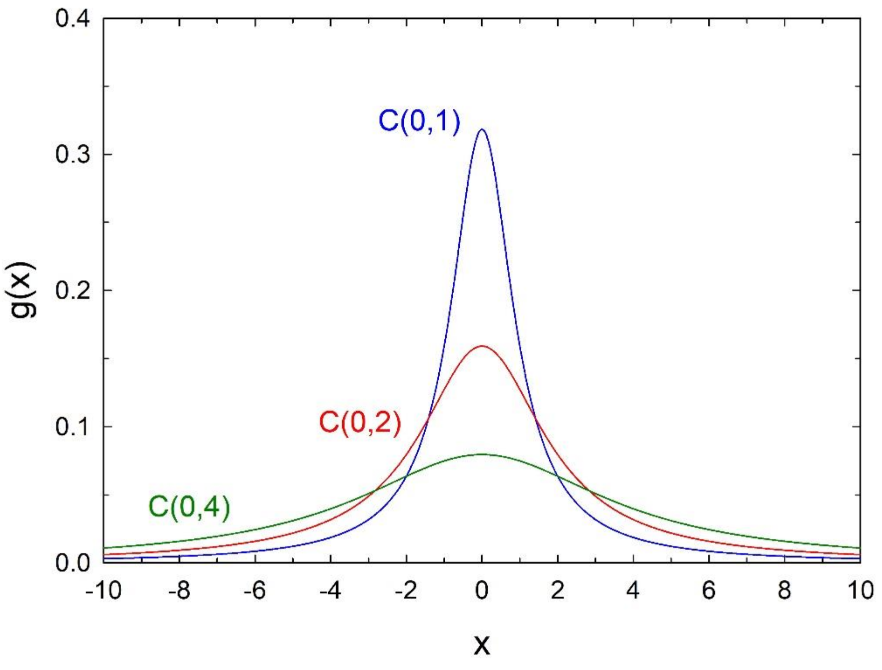
- hustota pravděpodobnosti

Cauchyho (Lorentzovo) rozdělení

$$\boxed{g(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi}\frac{L}{L^2 + (x - x_0)^2}}$$

Breit-Wignerovo rozdělení ($\gamma = 2L$)

$$\boxed{g(x|x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma/2}{\gamma^2/4 + (x - x_0)^2}}$$



- očekávaná hodnota a rozptyl nedefinovány!!!

  → použijeme např. medián x_0 a pološířku γ

Cauchyho rozdělení

Cauchyho rozdělení $C(x_0, L)$

- distribuční funkce

Cauchyho (Lorentzovo) rozdělení

$$\boxed{G(x|x_0, L) = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{x - x_0}{L}\right) + \frac{\pi}{2}\right)}$$