Binomické rozdělení

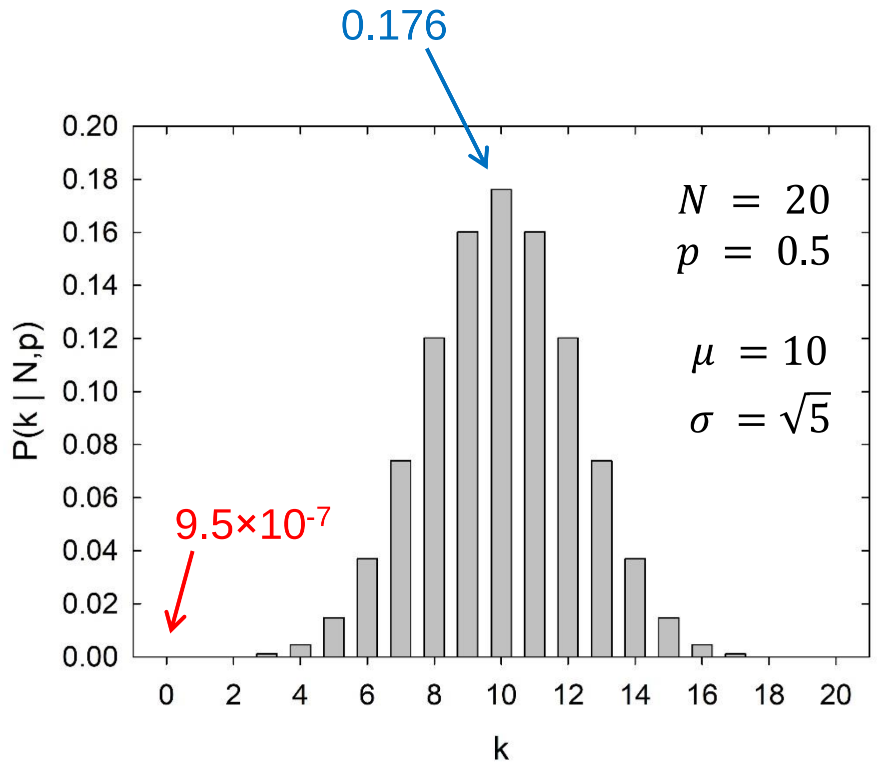
Házím N-krát korunou (N sudé). Jaká je pravděpodobnost, že padne k-krát panna?

- každá sekvence panen a orlů je stejně pravděpodobná ($p = 1/2$)
- počet sekvencí, kdy padne k panen a $N-k$ orlů: $\dfrac{N!}{(N-k)!\,k!} \Rightarrow P = \dfrac{N!}{(N-k)!\,k!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^N$
- obecný případ, kdy padne k-krát panna

$$\boxed{P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{i=1}^{N} \frac{kN!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = Np$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = E[k^2] - (E[k])^2 = Np(1-p)$$



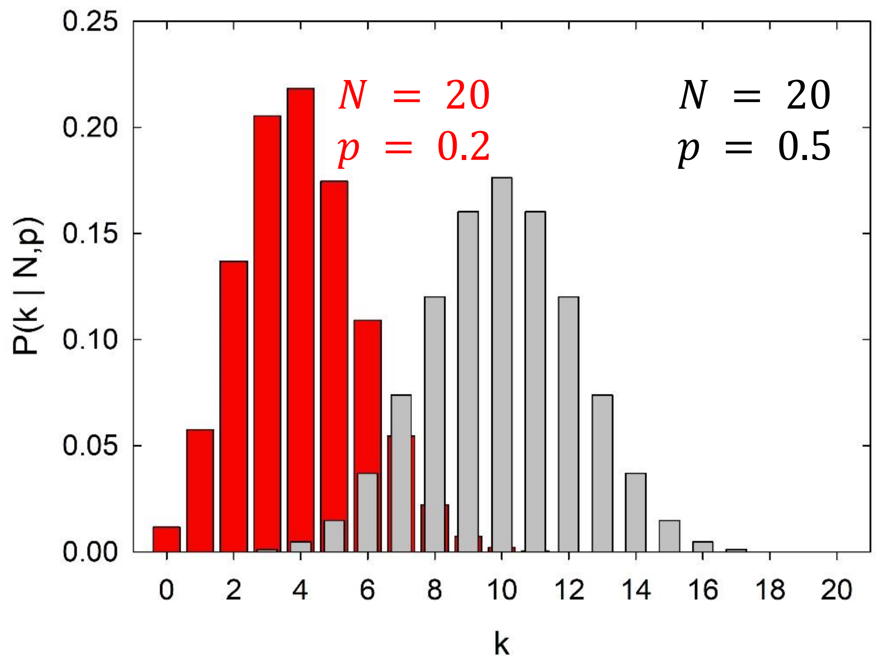
Binomické rozdělení

Házím N-krát korunou (N sudé). Jaká je pravděpodobnost, že padne $N/2$-krát panna?

- každá sekvence panen a orlů je stejně pravděpodobná ($p = 1/2$)
- počet sekvencí, kdy padne k panen a $N-k$ orlů: $\dfrac{N!}{(N-k)!\,k!} \Rightarrow P = \dfrac{N!}{(N-k)!\,k!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^N$
- obecný případ, kdy padne k-krát panna

$$\boxed{P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}}$$

- počet pokusů N
- pravděpodobnost „úspěchu“ p
- počet úspěšných pokusů $k \in \{0,1,2,\dots,N\}$
  (náhodná proměnná)



Poissonovo rozdělení

Velký počet pokusů, malá pravděpodobnost úspěchu: $Np = \nu = \text{konst.},\ N \to \infty, p \to 0$

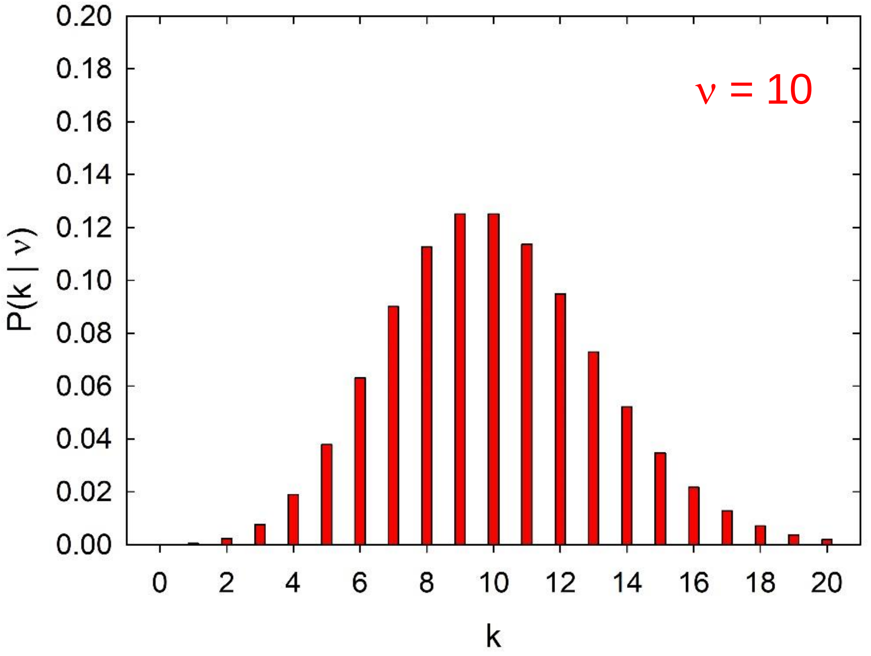
- např. počet událostí v *i*-tém binu spektra
- limita binomického rozdělení

$$P(k|\nu) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-k)!\,k!}\left(\frac{\nu}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{N}\right)^{N-k}$$

$$\boxed{P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}}$$

$$E[k] \equiv \mu = \sum_{i=1}^{N} k \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \nu$$

$$V[k] \equiv \sigma^2 = E[k^2] - (E[k])^2 = \nu$$



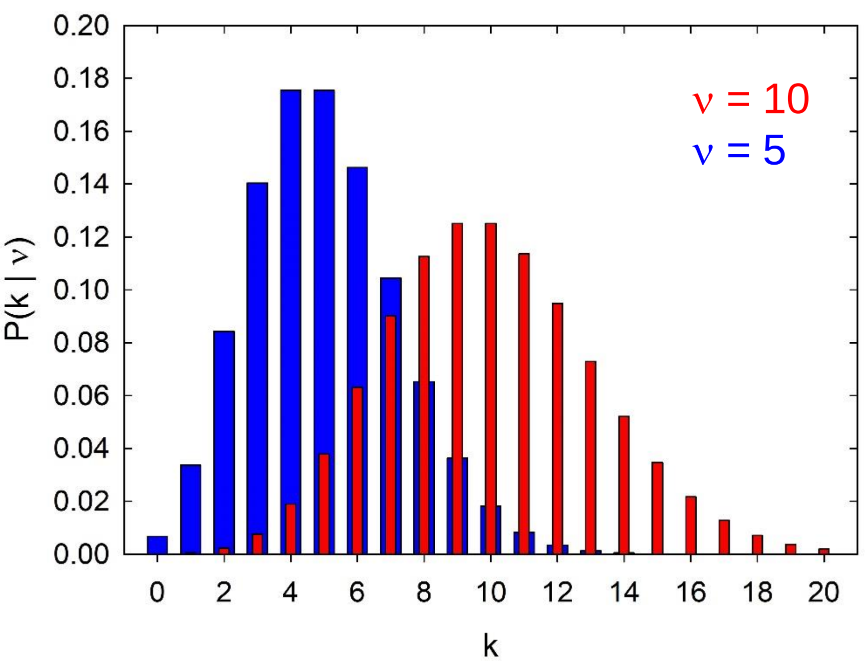
Poissonovo rozdělení

Velký počet pokusů, malá pravděpodobnost úspěchu: $Np = \nu = \text{konst.}, N \to \infty, p \to 0$

- např. počet událostí v *i*-tém binu spektra
- limita binomického rozdělení $$P(k|\nu) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-k)!\,k!}\left(\frac{\nu}{N}\right)^k \left(1-\frac{\nu}{N}\right)^{N-k}$$

$$\boxed{P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!}e^{-\nu}}$$

- průměrný počet úspěchů ν
- počet úspěšných pokusů (náhodná proměnná) $k \in \{0,1,2,\dots,\infty\}$



Binomické vs Poissonovo rozdělení

- Příklad: 3γ anihilace

  Při anihilaci elektronu a pozitronu (antičástice elektronu) vzniká v 99.27% případů dva fotony. Ve zbylých vzácných případech dochází k anihilaci za vzniku 3 (a více) fotonů. Jaká je pravděpodobnost, že za $1\ s$ detekujeme alespoň jednu tří-fotonovou anihilaci? Detektor zaznamená 500 anihilačních událostí za s.

1. Binomické rozdělení $P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$

   $N = 500$

   $p = 0.0073$

   $$P = 1 - P(0|N,p) = 1 - (1-p)^N = 0.97435 \doteq 97.4\%$$

2. Poissonovo rozdělení $P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$

   $\nu = Np = 3.65$

   $$P = 1 - P(0|\nu) = 1 - e^{-\nu} = 0.97401 \doteq 97.4\%$$

Binomické vs Poissonovo rozdělení

- Binomické rozdělení $$P(k|N,p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

- Poissonovo rozdělení $$P(k|\nu) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}$$