Jevy

výsledky opakovaných měření nebo pozorování

- Ω – prostor jevů (prostor událostí)

- výsledek ω – elementární jev (elementární událost), $\omega \in \Omega$

- $A \subset \Omega$ – jev (událost)

- $\omega \in A$, výsledek ω příznivý jevu A

Náhodná proměnná

přiřazení reálného čísla výsledku experimentu (zobrazení)

- **diskrétní náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky lze seřadit do posloupnosti $x_1, x_2, \ldots, x_N$

  konečná diskrétní náhodná proměnná: N je přirozené číslo

  příklad: házení kostkou – $\{1,2,3,4,5,6\}$

  nekonečná diskrétní náhodná proměnná: N je nekonečno

  příklad: počet rozpadů radioaktivního zářiče za jednotku času – $\{0,1,2,3, \ldots\}$

- **spojitá náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky tvoří nespočetnou množinu
  příklad: měření hmotnosti vzorku – výsledek může být jakékoli kladné reálné číslo

Pravděpodobnost – Kolmogorovy axiomy

Nechť Ω je prostor jevů pro daný experiment. Potom pravděpodobnost P je každé zobrazení množiny všech podmnožin Ω do množiny reálných čísel, které splňuje následující podmínky:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad P(A) \geq 0$
3. $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Některé vlastnosti pravděpodobnosti:

i. $P(\emptyset) = 0$

ii. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

iii. $0 \leq P(A) \leq 1$

iv. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

v. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nezávislost

Jevy *A* a *B* jsou **nezávislé** pokud platí: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Výsledek jevu A nijak neovlivní pravděpodobnost jevu *B* a obráceně.

Příklad: Opakujeme *N*-krát experiment. Ve většině případů jsou jednotlivá měření nezávislá.

Pravděpodobnostní míra – $n \times$ házení korunou

- prostor událostí: $\Omega = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = p, o\}$ 2^n prvků
- počet podmnožin prostoru událostí: 2^{2^n}
- pravděpodobnost: $P(\emptyset) = 0$ $P(\Omega) = 1$

$$P\big((p, o, o, p, \dots, o, o)\big) = \frac{1}{2^n}$$

- pravděpodobnost, že nejpozději ve čtvrtém pokusu padne panna (jev A)

doplněk k jevu A: $\bar{A} = (o, o, o, o, a, a, \dots, a)$

$$P(\bar{A}) = \frac{2^{n-4}}{2^n} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$$

Pravděpodobnost

- **náhodný výběr** – každý z výsledků experimentu je stejně pravděpodobný

  pravděpodobnost jevu A: $$\boxed{P(A) = \frac{n_A}{n}}$$

  n_A – počet výsledků příznivých jevu A

  n – celkový počet možných výsledků experimentu

- **klasická definice pravděpodobnosti** – limita relativních četností jevu A

  opakujeme N-krát experiment

  N_A – počet výsledků, kdy nastal jev A

  relativní četnost jevu A: $$X_A = \frac{N_A}{N}$$

  pravděpodobnost jevu A: $$\boxed{P(A) = \lim_{N\to\infty} X_A = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}}$$

Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce

- **diskrétní náhodná proměnná**

prostor událostí $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ konečná

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ nekonečná

pravděpodobnost, že nastane výsledek x_i

$$\boxed{P(x = x_i) \equiv P_i}$$

normalizační podmínka $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$ konečná

$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ nekonečná

Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce

- **spojitá náhodná proměnná**

prostor událostí $\Omega \subset \boldsymbol{R}$ nespočetná

pravděpodobnost, že výsledek padne do intervalu $[x_0, x_0 + \mathrm{d}x]$

$$\boxed{P(x \in [x_0, x_0 + \mathrm{d}x]) \equiv f(x_0)\mathrm{d}x}$$

pravděpodobnost, že výsledek padne do intervalu $[a, b]$

$$\boxed{P(x \in [a, b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

$f(x)$ **hustota pravděpodobnosti**

$F(x)$ **distribuční funkce**

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t}$$

normalizační podmínka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

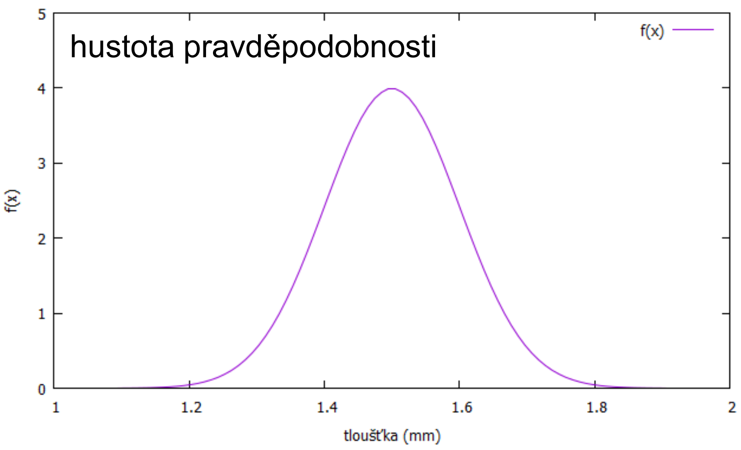
Hustota pravděpodobnosti – normální rozdělení

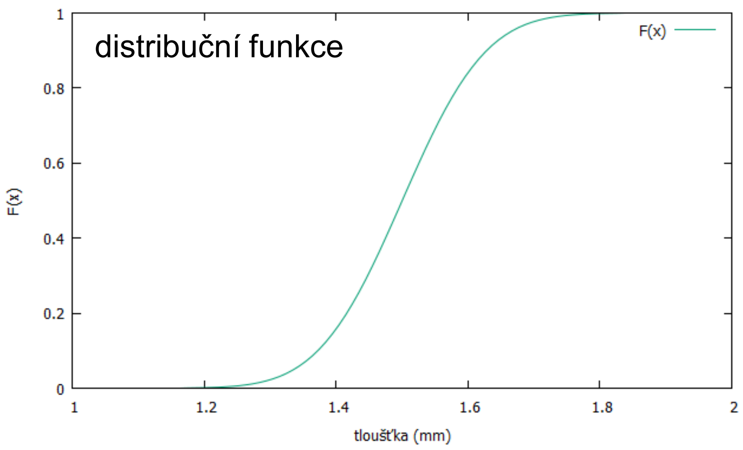
- Příklad: měření tloušťky vzorku $\mu = 1.5\ \mathrm{mm},\ \sigma = 0.1\ \mathrm{mm}$

  prostor událostí $\Omega = \boldsymbol{R}$

  hustota pravděpodobnosti $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

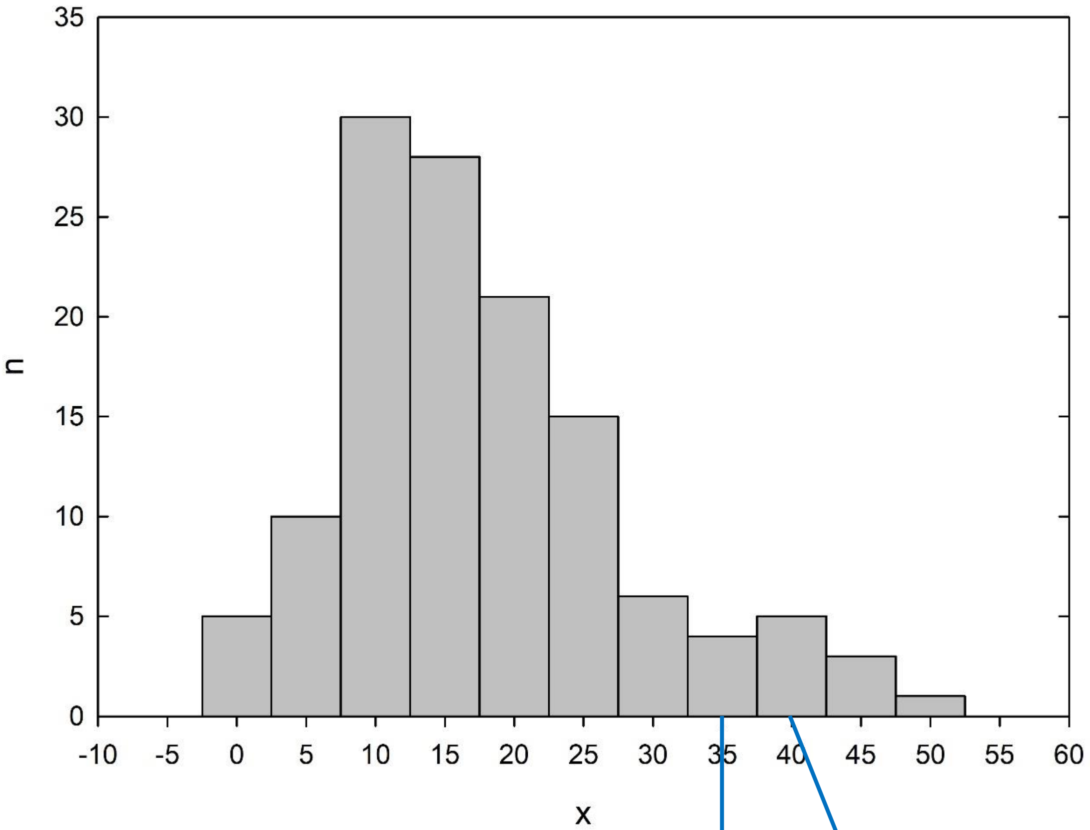
  distribuční funkce $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right)$$





Histogram

- **histogram** – způsob, jak zjistit hustotu pravděpodobnosti z experimentálních dat



šířka binu: $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$

plocha histogramu: $\sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i$

normalizovaný histogram: $n_i \to x_i$

$$\xi_i = \frac{n_i}{\Delta_i N} \qquad N = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

plocha normalizovaného histogramu:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i \Delta_i = 1$$

hustota pravděpodobnosti:

$$\boxed{f(x) = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \xi_i = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{n_i}{\Delta_i N}}$$