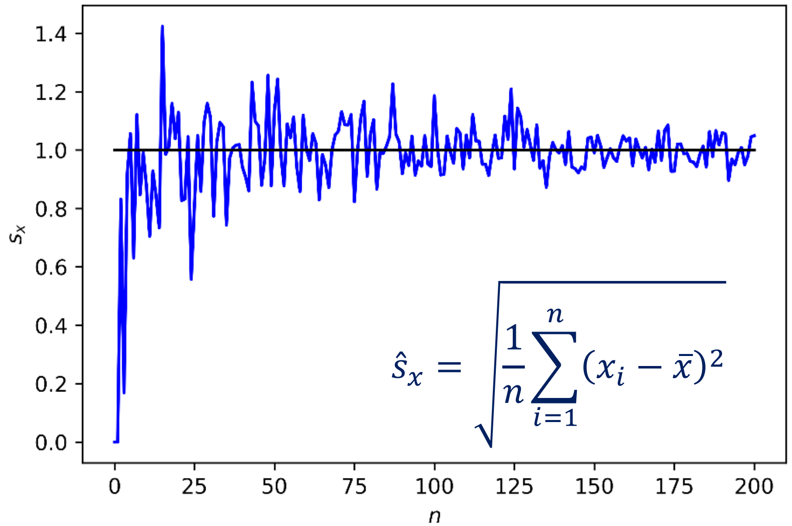
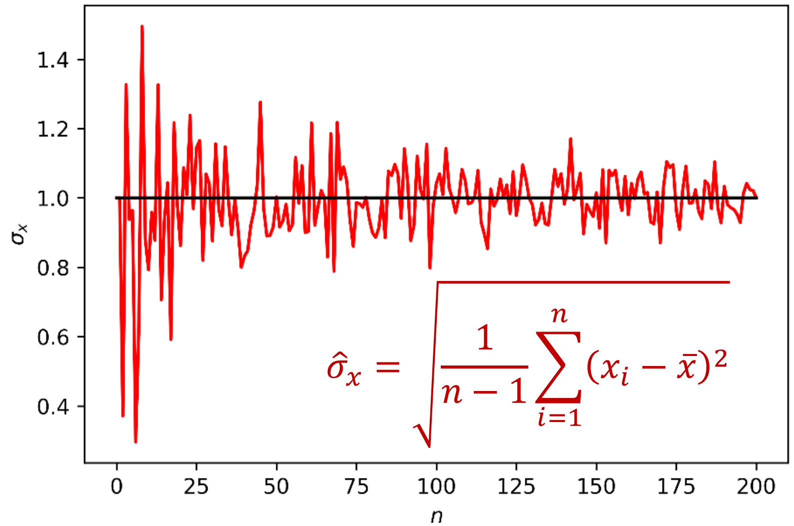
Odhady parametrů (estimátory)

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ jsou nezávislé
- parametry rozdělení $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
- odhad parametru (estimátor) $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$
- Cíl: Najít nejlepší odhady $\hat{\theta}_j$ parametrů θ_j.





Vlastnosti odhadů (estimátorů)

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ jsou nezávislé
- parametry rozdělení $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
- odhad parametru (estimátor) $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$
- Cíl: Najít nejlepší odhady $\hat{\theta}_j$ parametrů θ_j.

---

1. konzistence

pro $n \to \infty$ konverguje $\hat{\theta}_j \to \theta_j$

2. předpojatost

$b \equiv E[\hat{\theta}_j] - \theta_j$ $b = 0$ $\Rightarrow$ nevychýlený (nepředpojatý) odhad

3. efektivita

$$E\left[\left(\hat{\theta}_j - \theta_j\right)^2\right] = V[\hat{\theta}_j] + b^2$$

statistická a systematická chyba odhadu

Metoda maximální věrohodnosti

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i \in f(x|\boldsymbol{\theta})$ jsou nezávislé
- parametry rozdělení $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$
- odhad parametru (estimátor) $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$

$$L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

- Cíl: Najít nejlepší odhady $\hat{\theta}_j$ parametrů θ_j.

- pravděpodobnost $P\big(x \in (x_i, x_i + \mathrm{d}x)\big) = f(x_i|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x$
- pravděpodobnost, že naměříme hodnoty $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $$P = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}x$$

věrohodnostní funkce $$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\boldsymbol{\theta})$$

- hledáme hodnoty $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, pro které $L(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ nabývá maximum $$\frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0 \qquad k = 1,2, \dots, m$$

Odhad parametrů normálního rozdělení

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
- hustoty pravděpodobnosti $f(x_i|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$
- věrohodnostní funkce $L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$

$$\ln L(\mu,\sigma|\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)$$

- odhad očekávané hodnoty $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$
- odhad rozptylu $\left.\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\hat{\sigma}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2}$

Musíme znát skutečnou očekávanou hodnotu!

Odhad parametrů normálního rozdělení

- věrohodný odhad očekávané hodnoty $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (aritmetický průměr)
- věrohodný odhad rozptylu $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \equiv s_0^2$
- předpojatost?

$$E[\hat{\mu}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[x_i] = \mu$$

$\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

$$E[\hat{\sigma}^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \mu)^2] = \sigma^2$$

$\Rightarrow$ nepředpojatý odhad

$$E[s_0^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[(x_i - \bar{x})^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$\Rightarrow$ předpojatý odhad

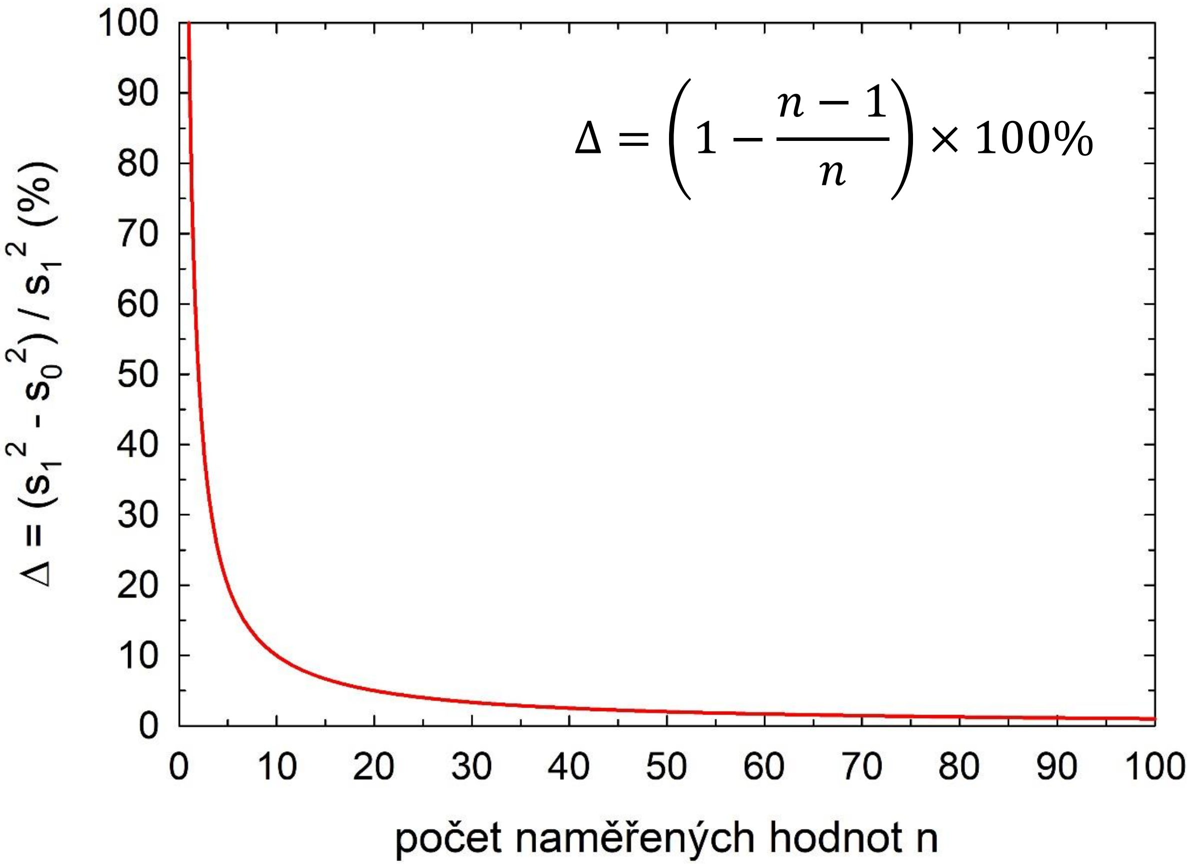
- nepředpojatý odhad rozptylu $\boxed{s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

Odhad parametrů normálního rozdělení

$$s_0 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\Delta = \frac{s_1^2 - s_0^2}{s_1^2} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$



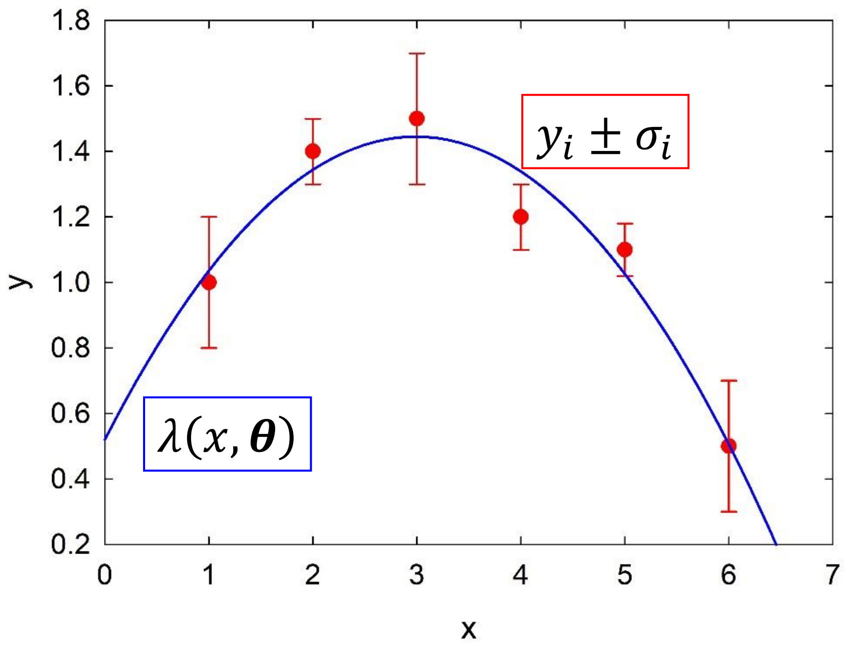
Metoda nejmenších čtverců

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (nezávislé proměnné)

  $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (závislé proměnné) $y_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$

- modelová funkce $\lambda(x|\boldsymbol{\theta})$ modelujeme závislost $y(x)$

  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ (parametry modelové závislosti)



Metoda nejmenších čtverců

- sada naměřených hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (nezávislé proměnné)

  $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ (závislé proměnné) $y_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$

- modelová funkce $\lambda(x|\boldsymbol{\theta})$ modelujeme závislost $y(x)$

  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ (parametry modelové závislosti)

- věrohodnostní funkce

$$L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left[-\frac{\left(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_i^2}\right]$$

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\sqrt{2\pi\sigma_i^2}\right)$$

- minimalizujeme tzv. „chí kvadrát“

$$\boxed{\chi^2(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \lambda(x_i|\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_i^2}}$$

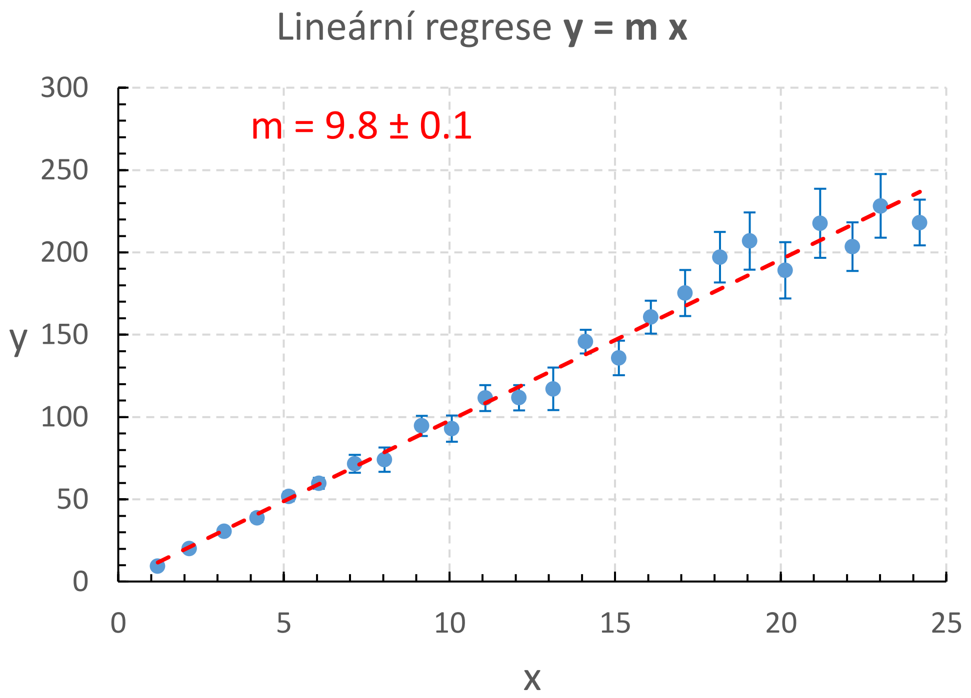
Metoda nejmenších čtverců – lineární fit $y = m \cdot x$

- modelová funkce $\lambda(x|m) = m \cdot x$
- „chí kvadrát“ $\chi^2(m|\boldsymbol{y},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m \cdot x_i)^2}{\sigma_i^2}$
- lineární regrese

$$\boxed{\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}}$$

- přenos chyb

$$\boxed{\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} = \frac{1}{\langle x^2 \rangle}}$$



- označení $\langle a \rangle \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sigma_i^2}$ (vážený průměr)

Metoda nejmenších čtverců – lineární fit $y = a \cdot x + b$

- modelová funkce $\lambda(x|a) = a \cdot x + b$
- „chí kvadrát“ $\chi^2(a, b|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - a \cdot x_i - \boldsymbol{b})^2}{\sigma_i^2}$
- lineární regrese

$$\hat{a} = \frac{\langle 1\rangle\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\langle 1\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\langle y\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\langle x^2\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-\langle x\rangle}{\langle 1\rangle\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$