

1. (a) Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.

- Gaussián

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

FWHM:

$$g(x_1) = g(x_2) = \frac{1}{2} \max g(x)$$

$$\exp\left(-\frac{x_{1,2}^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \sigma\sqrt{2\ln 2}$$

$$w_g = x_2 - x_1$$

$$w_g = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2\ln 2}}$$

- Lorentzián

$$l(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{\gamma^2/4 + x^2}$$

FWHM:

$$l(x_1) = l(x_2) = \frac{1}{2} \max l(x)$$

$$\frac{1}{\gamma^2/4 + x_{1,2}^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^2/4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{\gamma}{2}$$

$$w_l = x_2 - x_1$$

$$w_l = \gamma \Rightarrow \gamma = 1$$

```
1 set term wxt 0
2 pi=3.1415926535897932384626433832795
3 mu=0      #poloha maxima
4 w=1      #FWHM
5 sigma=w/(2*sqrt(2*log(2)))
6 set xlabel 'x'
7 set ylabel 'hustota pravdepodobnosti'
8 set xrange [-5*sigma:5*sigma]
9 set yrange [0:1/(sqrt(2*pi)*sigma)]
10 # gaussian
11 g(x)=1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-(x-mu)**2/(2*sigma**2))
12 #lorentzian
13 l(x)=1/pi*w/2/(w**2/4.0+(x-mu)**2)
14 plot g(x) title 'Gaussian' with lines linestyle 1,l(x) title 'Lorentzian' with lines linestyle 2
15
16 set term wxt 1
17 set xlabel 'x'
18 set ylabel 'pravdepodobnost'
19 set xrange [-5*sigma:5*sigma]
20 set yrange [0:1]
21 #distribucni funkce normalni rozdeleni
22 G(x)=0.5*(1+erf((x-mu)/(sigma*sqrt(2))))
23 #distribucni funkce Breit-Wignerovo rozdeleni
24 L(x)=1/pi*(atan(2*x/w)+pi/2)
25 plot G(x) title 'G(x)' with lines linestyle 1, L(x) title 'L(x)' with lines linestyle 2
26
27 print sprintf('Normal distribution P(|x|>2)=%.10f',2*(1-G(2)))
28 print sprintf('Breit-Wigner distribution P(|x|>2)=%.10f',2*(1-L(2)))
```

1. (a) Nakreslete v Gnuplotu graf Gaussiánu a Lorentziánu s pološířkou 1 a maximem v bodě 0.

- Gaussián

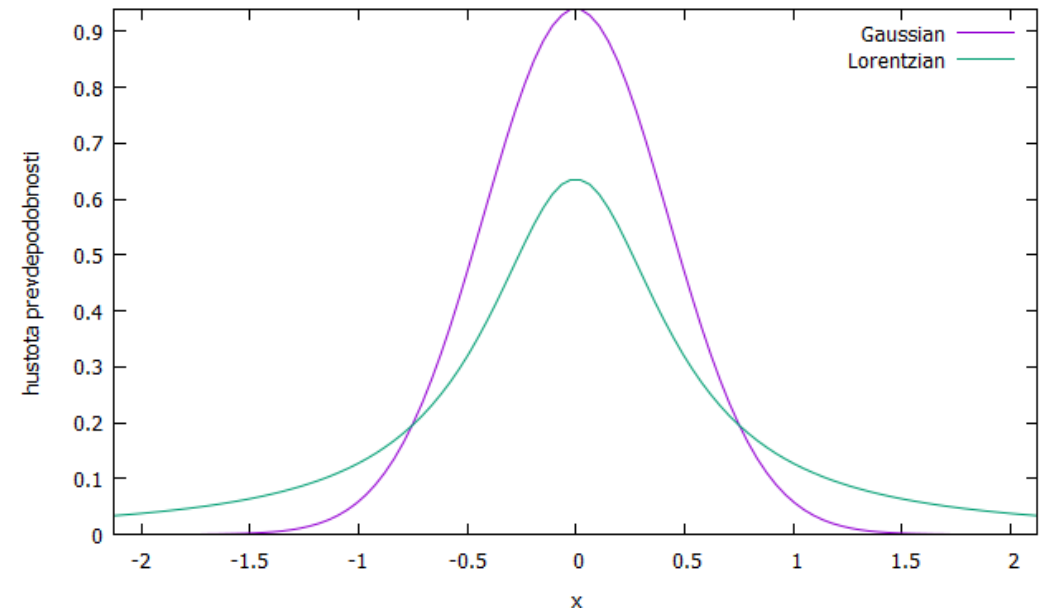
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2 \ln 2}} \doteq 0.425$$

- Lorentzián

$$l(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{\gamma^2/4 + x^2}$$

$$\gamma = 1$$



1. (b) Nakreslete grafy distribučních funkcí obou rozdělení.

- distribuční funkce ke Gaussiánu

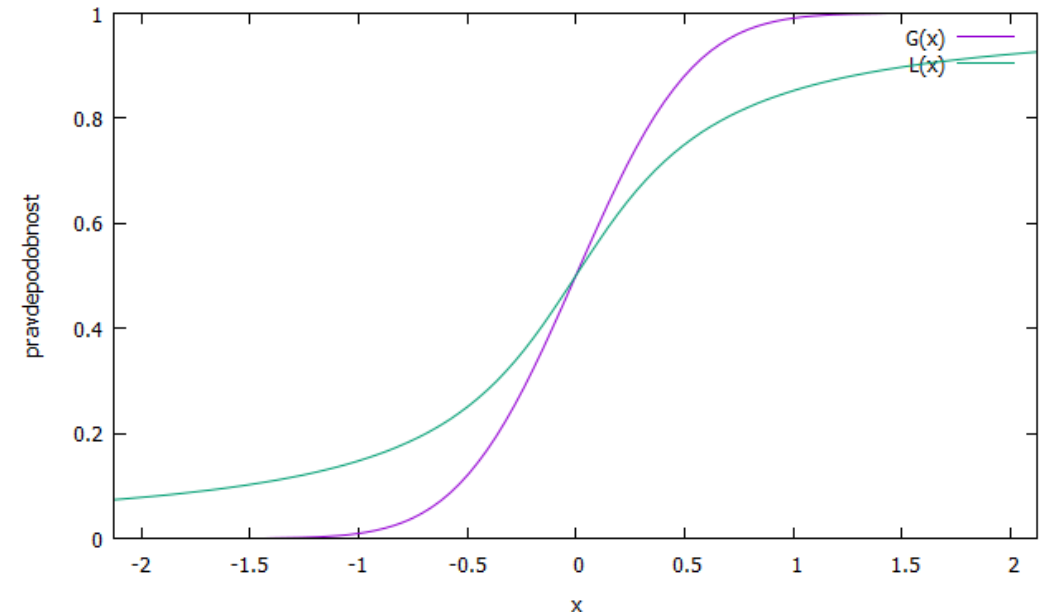
$$G(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2 \ln 2}} \doteq 0.425$$

- distribuční funkce k Lorentziánu

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{\gamma} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\gamma = 1$$



1. (c) Jaká je pravděpodobnost, že  $|x| > 2$  pro obě rozdělení?

- pravděpodobnost - normální rozdělení

$$P(|x| > 2) = P(x > 2) + P(x < -2) = 1 - G(2) + G(-2) = 1 - G(2) + (1 - G(2))$$

$$P(|x| > 2) = 2(1 - G(2)) = 0.00000248 \doteq 0.0002\%$$

- pravděpodobnost - Breit-Wignerovo rozdělení

$$P(|x| > 2) = P(x > 2) + P(x < -2) = 1 - L(2) + L(-2) = 1 - L(2) + (1 - L(2))$$

$$P(|x| > 2) = 2(1 - L(2)) = 0.15595826 \doteq 15.6\%$$

2. Průměrná hodnota IQ v ČR je 100. Vyšší IQ než 80 má 90% lidí. Jaké musíte mít IQ, abyste byli geniální, tzn. vaše IQ je vyšší než u 99.95% populace?

- normální rozdělení  $N(\mu, \sigma)$

$$\mu = 100 \qquad \sigma = ? \qquad x = 80$$

- distribuční funkce

$$G(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- 90% populace IQ > 80

$$G(80) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) = -0.8$$

$$\sigma = \frac{x - \mu}{\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(-0.8)} = \frac{-20}{\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(-0.8)}$$

$$\sigma \doteq 15.6$$

2. Průměrná hodnota IQ v ČR je 100. Vyšší IQ než 80 má 90% lidí. Jaké musíte mít IQ, abyste byli geniální, tzn. vaše IQ je vyšší než u 99.95% populace?

- normální rozdělení  $N(\mu, \sigma)$

$$\mu = 100 \quad \sigma \doteq 15.6$$

- distribuční funkce

$$G(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

- hranice geniality  $x_g$

$$G(x_g|\mu, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x_g - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] = 0.9995$$

$$x_g = \mu + \sigma\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2 \times 0.9995 - 1)$$

$$x_g \geq 152$$

```
1 from scipy.special import erfinv
2 from numpy import sqrt
3 sigma=(80-100)/(sqrt(2)*erfinv(-0.80))
4 genius=100+sqrt(2)*sigma*erfinv(2*0.9995-1)
5 print('sigma=',sigma)
6 print('IQ =',genius)
```