Příklad zpracování naměřených dat

Studium harmonických kmitů mechanického oscilátoru

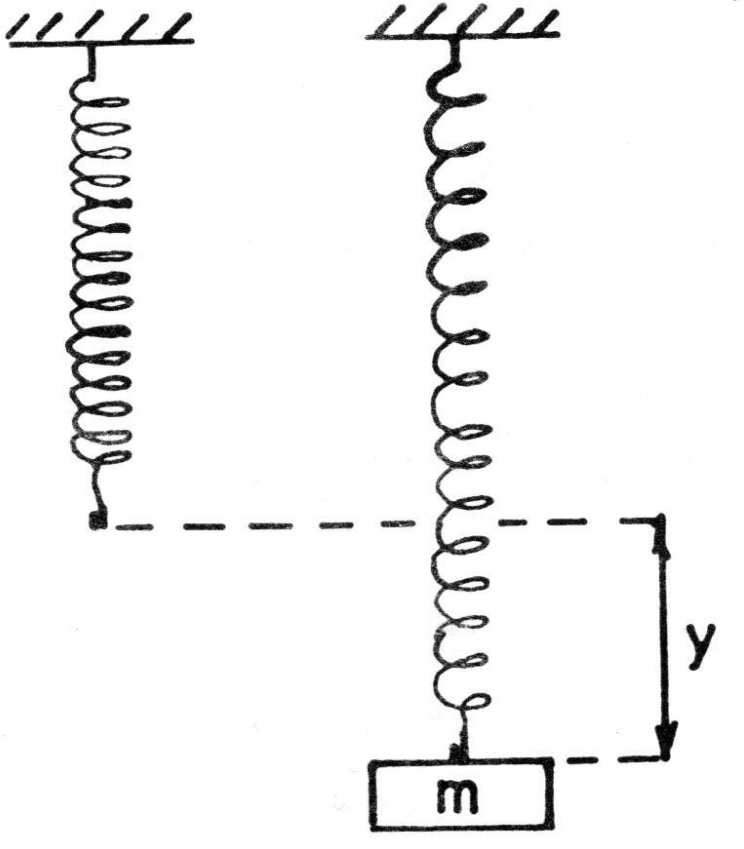
EXCEL	`Měření - harmonický oscilátor PH.xlsx`
Origin	`Měření - harmonický oscilátor PH.opju`

Pracovní úkol:

1. Změřte tuhost pěti pružin statickou metodou.
2. Změřte tuhost pěti pružin dynamickou metodou.
3. Určete místní tíhové zrychlení z doby kmitu tělesa známé hmotnosti a výchylky pružiny po zavěšení tohoto tělesa.
4. Sestrojte graf závislosti $\omega = \sqrt{k/m}$.

Úloha 1 – Statická metoda

- měřené veličiny
  - m hmotnost závaží
  - y_1 poloha konce nenapjaté pružiny
  - y_2 poloha konce zatížené pružiny
- vypočítané veličiny
  - y prodloužení pružiny $y = y_1 - y_2$
  - k tuhost pružiny $k = \frac{mg}{y}$



Úloha 1 – Statická metoda

- naměřené hodnoty

Pružina 1		
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
10.0	57.6	55.2
20.0	57.6	52.8
30.0	57.6	50.4
50.0	57.6	45.6
99.8	57.6	34.1

Pružina 2		
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
99.8	54.3	52.1
200.1	54.3	50.0
299.9	54.3	47.7
399.9	54.3	45.6
500.2	54.3	43.6

Pružina 3		
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
30.0	54.2	49.4
50.0	54.2	46.2
80.0	54.2	41.4
99.8	54.2	38.7
129.8	54.2	33.7

Pružina 4		
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
50.0	46.6	39.6
99.8	46.6	32.9
149.8	46.6	27.0
179.8	46.6	22.0
200.1	46.6	19.2

Pružina 5		
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
99.8	46.8	41.7
200.1	46.8	36.6
299.9	46.8	31.6
399.9	46.8	26.5
500.2	46.8	21.4

Úloha 1 – Statická metoda

- zpracování měření – odhady parametrů (např. pružina 1)

Pružina 1				
m (g)	y_1 (cm)	y_2 (cm)	y (cm)	k (kg s^{-2})
10.0	57.6	55.2	2.4	4.09
20.0	57.6	52.8	4.8	4.09
30.0	57.6	50.4	7.2	4.09
50.0	57.6	45.6	12.0	4.09
99.8	57.6	34.1	23.5	4.17
			průměr	**4.10**
			chyba 1 měření	0.04
			chyba průměru	**0.02**

aritmetický průměr $\bar{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$

standardní odchylka (nepředpojatá) $\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{k})^2}{n-1}}$

chyba průměru (přenos chyb) $\sigma_{\bar{k}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}}$

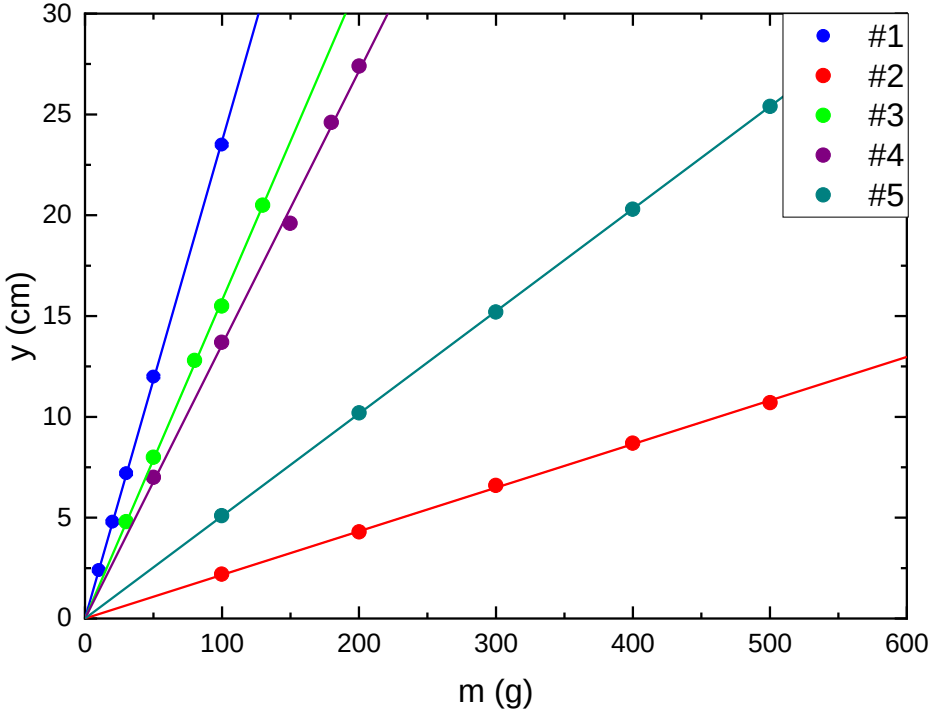
$$k_1 = (4.10 \pm 0.02)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

Poznámky:

- chyba je zaokrouhlená na 2. platnou číslici
- střední hodnota je zaokrouhlená na stejný řád jako chyba
- před jednotku vkládáme mezeru
- jednotky píšeme bez kurzívy

Úloha 1 – Statická metoda

- zpracování měření – lineární regrese (např. pružina 1)



přímka procházející počátkem

$$y = a \cdot m \qquad a = 0.23675\ \mathrm{cm\ g^{-1}}$$
$$\sigma_a = 0.00102\ \mathrm{cm\ g^{-1}}$$

tuhost pružiny

$$y = \frac{g}{k} \cdot m$$

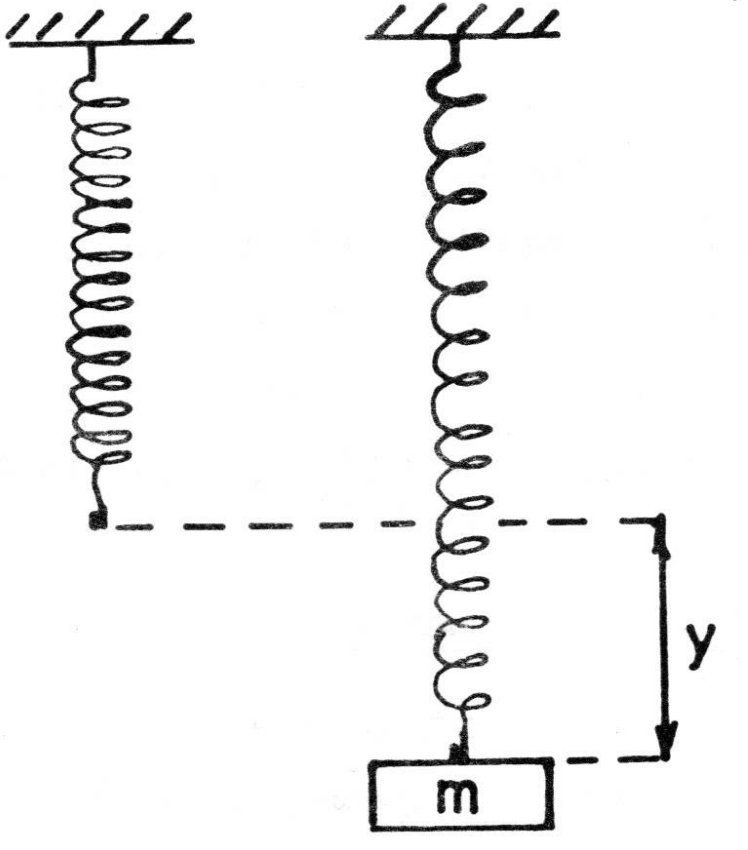
$$k = \frac{g}{a} \doteq 4.14\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$\sigma_k = \frac{g}{a^2}\sigma_a \doteq 0.02\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

$$k_1 = (4.14 \pm 0.02)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

Úloha 2 – Dynamická metoda

- měřené veličiny
  - m hmotnost závaží
  - y_1 poloha konce nenapjaté pružiny
  - y_2 poloha konce zatížené pružiny
  - $10\,T$ perioda 10 kmitů závaží



- vypočítané veličiny
  - y prodloužení pružiny $y = y_1 - y_2$
  - k tuhost pružiny $k = \frac{4\pi^2}{T^2} m$

Úloha 2 – Dynamická metoda

- naměřené hodnoty

Pružina 1			
m (g)	10 T (s)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
50.0	7.0	57.6	45.6
50.0	7.0	57.6	45.6
50.0	7.1	57.6	45.6
99.8	9.8	57.6	34.1
99.8	9.8	57.6	34.1
99.8	9.7	57.6	34.1
30.0	5.3	57.6	50.4
30.0	5.4	57.6	50.4
30.0	5.5	57.6	50.4

Pružina 2			
m (g)	10 T (s)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
299.9	5.2	54.3	47.7
299.9	5.1	54.3	47.7
299.9	5.3	54.3	47.7
500.2	6.6	54.3	43.6
500.2	6.5	54.3	43.6
500.2	6.5	54.3	43.6
399.9	5.8	54.3	45.6
399.9	5.9	54.3	45.6
399.9	6.0	54.3	45.6

Pružina 3			
m (g)	10 T (s)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
50.0	5.8	54.2	46.2
50.0	5.8	54.2	46.2
50.0	5.7	54.2	46.2
99.8	8.2	54.2	38.7
99.8	8.1	54.2	38.7
99.8	8.1	54.2	38.7
129.8	9.1	54.2	33.7
129.8	9.2	54.2	33.7
129.8	9.3	54.2	33.7

Pružina 4			
m (g)	10 T (s)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
99.8	7.6	46.6	32.9
99.8	7.6	46.6	32.9
99.8	7.6	46.6	32.9
200.1	10.7	46.6	19.2
200.1	10.7	46.6	19.2
200.1	10.9	46.6	19.2
149.8	9.2	46.6	27.0
149.8	9.3	46.6	27.0
149.8	9.4	46.6	27.0

Pružina 5			
m (g)	10 T (s)	y_1 (cm)	y_2 (cm)
200.1	6.6	46.8	36.6
200.1	6.5	46.8	36.6
200.1	6.6	46.8	36.6
500.2	10.2	46.8	21.4
500.2	10.2	46.8	21.4
500.2	10.3	46.8	21.4
399.9	9.0	46.8	26.5
399.9	9.1	46.8	26.5
399.9	9.2	46.8	26.5

Úloha 2 – Dynamická metoda

- naměřené hodnoty – odhady parametrů (např. pružina 1)

Pružina 1			
m (g)	10 T (s)	ω (s^{-1})	k (kg s^{-2})
50.0	7.0	8.98	4.03
50.0	7.0	8.98	4.03
50.0	7.1	8.85	3.92
99.8	9.8	6.41	4.10
99.8	9.8	6.41	4.10
99.8	9.7	6.48	4.19
30.0	5.3	11.86	4.22
30.0	5.4	11.64	4.06
30.0	5.5	11.42	3.92
		průměr	**4.06**
		chyba 1 měření	0.10
		chyba průměru	**0.03**

$$k_1 = (4.10 \pm 0.03)\ \mathrm{kg\ s^{-2}}$$

aritmetický průměr $\bar{k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$

standardní odchylka (nepředpojatá) $\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{k})^2}{n-1}}$

chyba průměru (přenos chyb) $\sigma_{\bar{k}} = \frac{\sigma_k}{\sqrt{n}}$

Úloha 2 – Dynamická metoda

- naměřené hodnoty – průměrná perioda kmitů (např. pružina 1)

Pružina 1	m =	50 g	99.8 g	30 g
		10 T (s)	10 T (s)	10 T (s)
		7.0	9.8	5.3
		7.0	9.8	5.4
		7.1	9.7	5.5
	průměr	**7.0333**	**9.7667**	**5.4000**
	statistická chyba	0.0577	0.0577	0.1000
	systematická chyba	0.0577	0.0577	0.0577
	celková chyba	0.0816	0.0816	0.1155
	chyba průměru	**0.0471**	**0.0471**	**0.0667**

průměrná perioda $\bar{T} = \frac{1}{10}\mu_{10T}$

neurčitost typu A (statistická) $\sigma_A = \frac{1}{10}\sigma_{10T}$

neurčitost typu B (systematická) $\sigma_B = \frac{1}{10}\frac{\varepsilon_T}{\sqrt{3}}$

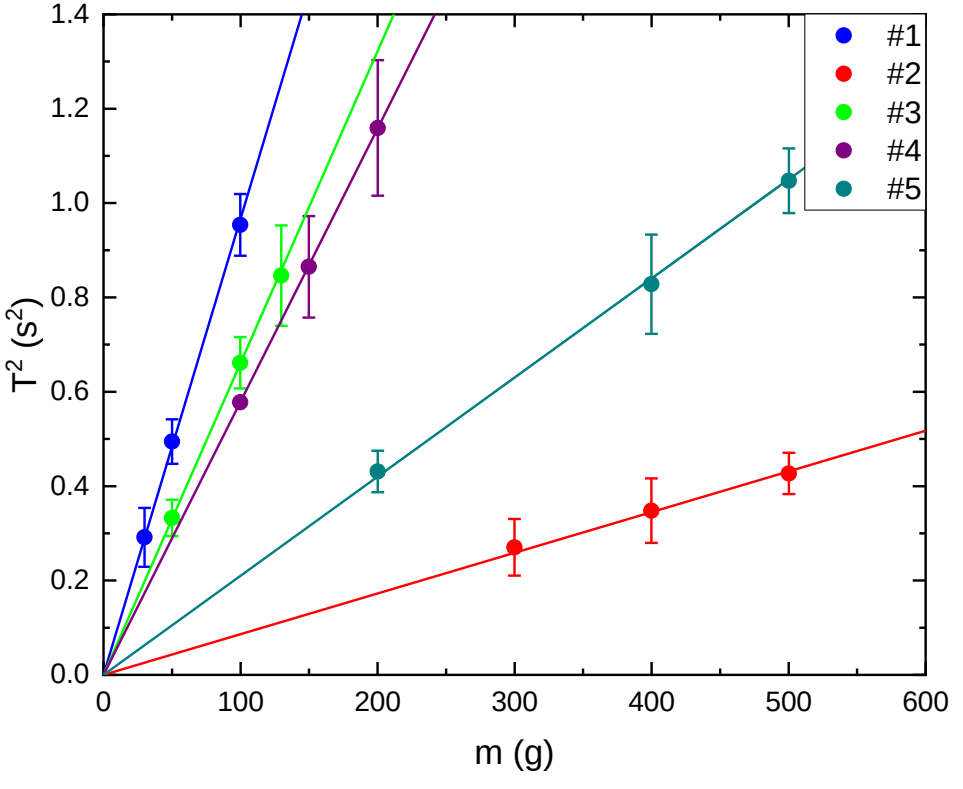
celková chyba $\sigma_C = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$

chyba průměru (přenos chyb) $\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_C}{\sqrt{3}}$

Poznámky:
- dělení 10 (naměřených 10 period)
- odhad maximální chyby měření času 0.1 s
- zpřesnění měření 10x

Úloha 2 – Dynamická metoda

- naměřené hodnoty – lineární regrese (např. pružina 1)



přímka procházející počátkem

$$T^2 = a \cdot m \qquad a = 9.67 \times 10^{-3}\ \mathrm{g^{-1}s^2}$$
$$\sigma_a = 0.10665 \times 10^{-3}\ \mathrm{g^{-1}s^2}$$

tuhost pružiny

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m$$

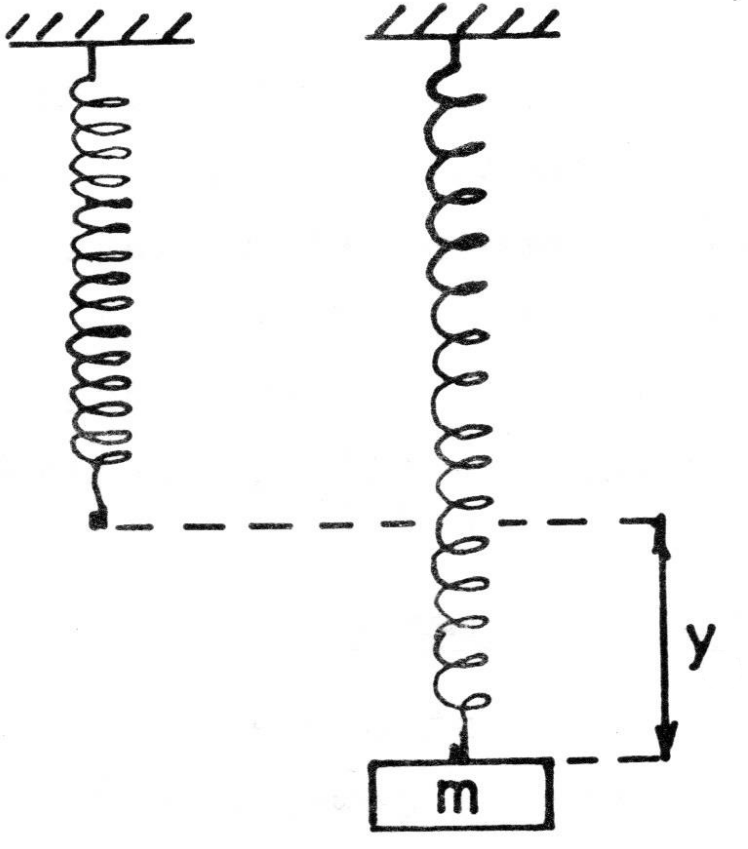
$$k = \frac{4\pi^2}{a} \doteq 4.08\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$$

$$\sigma_k = \frac{4\pi^2}{a^2}\sigma_a \doteq 0.04\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$$

$$\boxed{k_1 = (4.08 \pm 0.04)\ \mathrm{kg\,s^{-2}}}$$

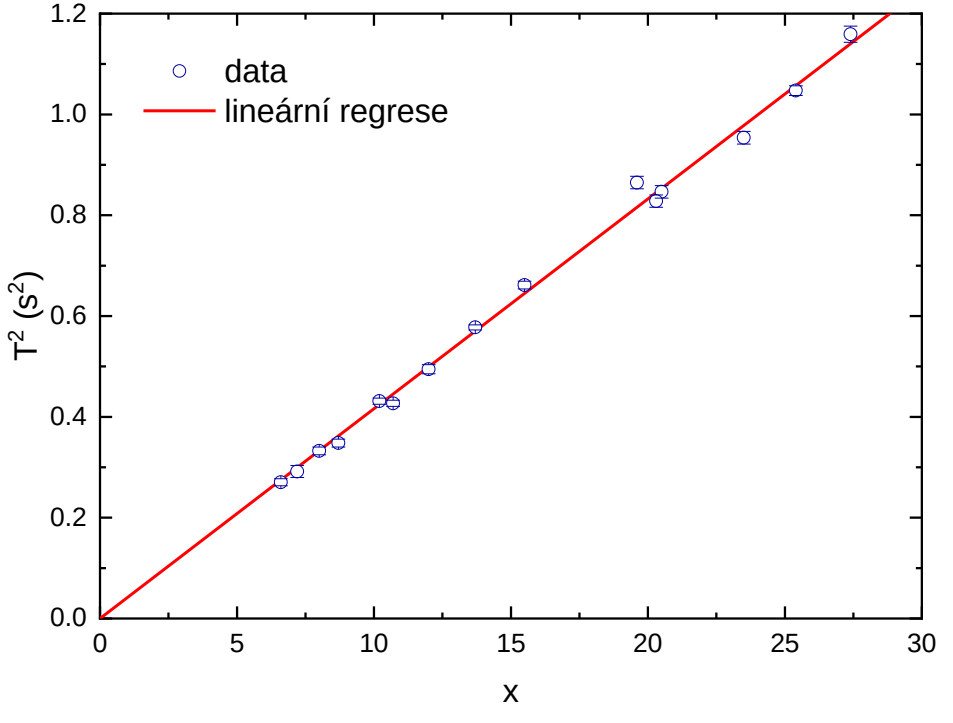
Úloha 3 – Tíhové zrychlení

- statická metoda $k = \frac{mg}{y}$
- dynamická metoda $k = \frac{4\pi^2}{T^2} m$
- tíhové zrychlení $g = \frac{4\pi^2}{T^2} y$



Úloha 3 – Tíhové zrychlení

- naměřené hodnoty – lineární regrese (dynamická metoda)



přímka procházející počátkem

$$T^2 = a \cdot y \qquad a = 0.04162\ \mathrm{cm^{-1}s^2}$$
$$\sigma_a = 0.000271\ \mathrm{cm^{-1}s^2}$$

tíhové zrychlení

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot y$$

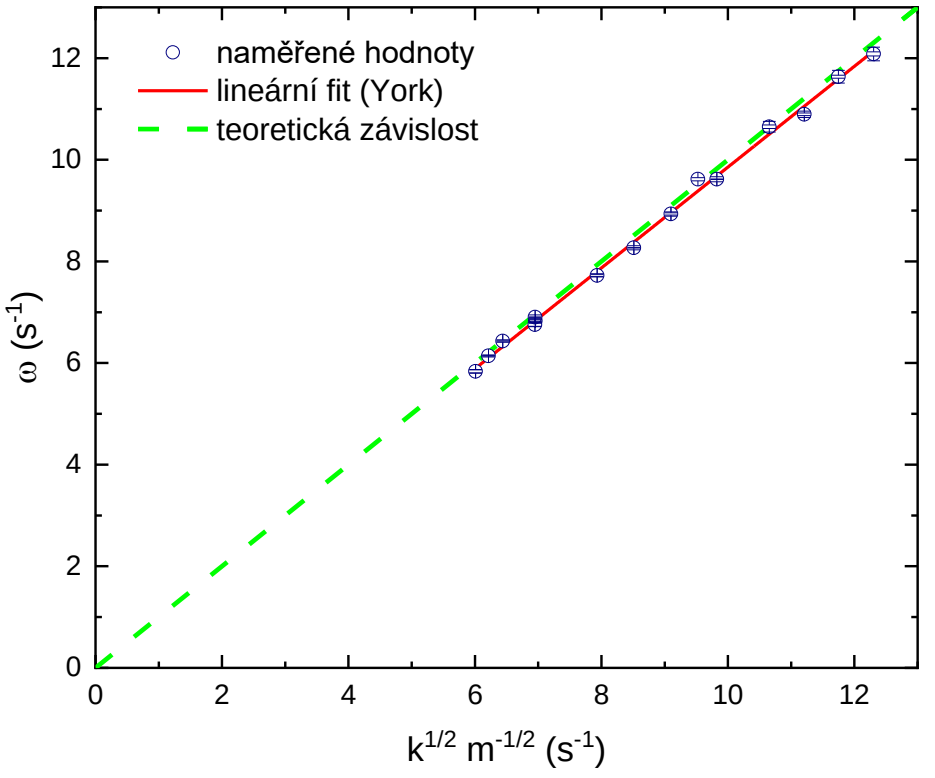
$$g = \frac{4\pi^2}{a} \doteq 9.49\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\sigma_g = \frac{4\pi^2}{a^2}\sigma_a \doteq 0.06\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$g = (9.46 \pm 0.06)\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Úloha 4 – Teoretická závislost

- naměřené hodnoty – lineární regrese s chybami x a y



$$x = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{2\sqrt{m}} \frac{\sigma_k}{\sqrt{k}}$$

$$y = \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \sigma_y = \frac{2\pi}{T^2} \sigma_T$$

směrnice přímky

$$\omega = a \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad a = 0.99 \pm 0.13$$

teoretická závislost

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad a = 1$$