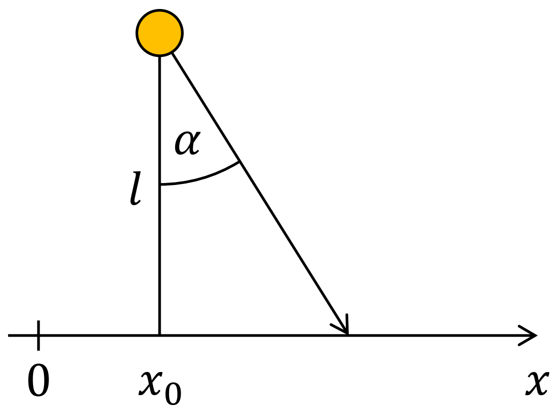
Problém majáku

majak.py

1. Jak určíme polohu majáku (x_0, l) pozorovaného z břehu?



Cauchyho rozdělení x vs rovnoměrné rozdělení α

$$x - x_0 = l \operatorname{tg} \alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{l}\right)$$

$$g(x) = f(\alpha)\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}\right| = \frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2 + (x - x_0)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi}$$

Věrohodnostní funkce pro sadu hodnot $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ → hledáme maximum L resp. $\ln L$

$$L(x_0, l|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi}\frac{l}{l^2 + (x_i - x_0)^2}$$

$$\ln L(x_0, l|\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(l) - \sum_{i=1}^{n} \ln\{\pi[l^2 + (x_i - x_0)^2]\}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial x_0} = 0 \qquad \frac{\partial \ln L}{\partial l} = 0$$

⇒ soustava dvou nelineárních rovnic

Problém majáku

majak.py

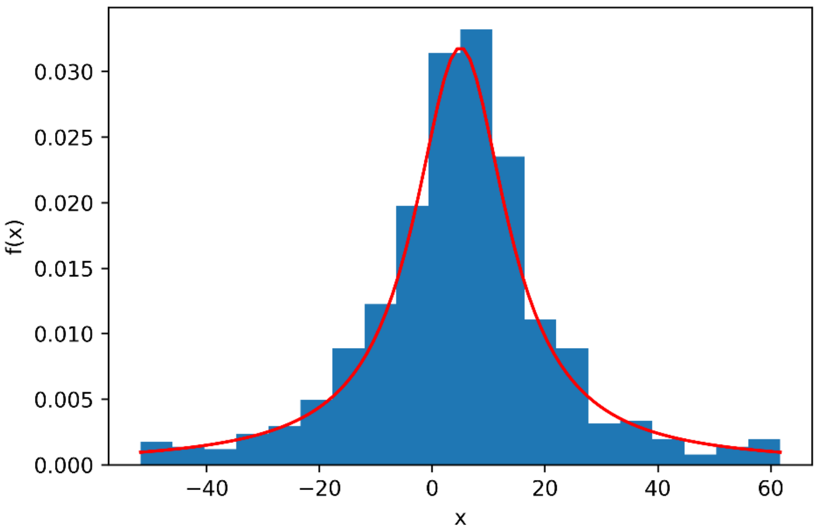
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
#SIMULACE vysledku mereni
x0_real=5   #skutecna x-ova poloha majaku
l_real=10   #skutecna y-ova poloha majaku
x=np.empty(N)
x=l_real*np.tan(np.random.random_sample(N)*np.pi-np.pi/2.0)+x0_real  #generator nahodnych hodnot x
                                                                      #pomoci rovnomerneho rozdeleni uhlu
fig,ax=plt.subplots()
x_range=l_real*np.tan(np.pi*80/180)     #rozsah hodnot x pro uhly od -80 do +80 stupnu
ax.hist(x,bins=20,range=(x0_real-x_range,x0_real+x_range),density=True)     #histogram hodnot x
xp=np.linspace(x0_real-x_range,x0_real+x_range,100)     #x-ove hodnoty pro modelovy lorentzian
yp=1/np.pi*l_real/(l_real**2+(xp-x0_real)**2)           #y-ove hodnoty pro modelovy lorentzian
ax.plot(xp,yp,c="red")
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("f(x)")

#HLEDANI polohy majaku
x0=np.linspace(-15,15,100)  #pole hledanych hodnot x0
N_x0=np.size(x0)
l=np.linspace(0.1,20,100)   #pole hledanych hodnot l
N_l=np.size(l)

l_mesh,x0_mesh=np.meshgrid(l,x0)    #generace dvourozmerne mrizky l_mesh krat x0_mesh
ln_L=np.zeros([N_x0,N_l])
for i in range(N):                  #funkce logaritmus verohodnostni funkce spocitana pro simulovane hodnoty x
    ln_L=ln_L+np.log(l_mesh)-np.log(np.pi*(l_mesh**2+(x[i]-x0_mesh)**2))
ln_L_max=np.max(ln_L)       #maximum logaritmu verohodnostni funkce
i_max,j_max=np.where(ln_L==ln_L_max)    #hledani maxima logaritmu vedohodnostni funkce
fig,ax=plt.subplots()
ax.contour(x0_mesh,l_mesh,ln_L,levels=200)  #konturovy 2D graf pro funkce ln L s 200 vrstevnicemi
ax.scatter(x0_real,l_real)      #skutecna poloha majaku
ax.scatter(x0[i_max],l[j_max],c="red",marker="+",s=100)     #nalezena poloha majaku
ax.set_xlabel("x0")
ax.set_ylabel("l")
plt.show()
print('x0= %.8f' % x0[i_max])
print('l= %.8f' % l[j_max])
```

Problém majáku

majak.py



← histogram simulovaných hodnot x

● skutečná poloha majáku:

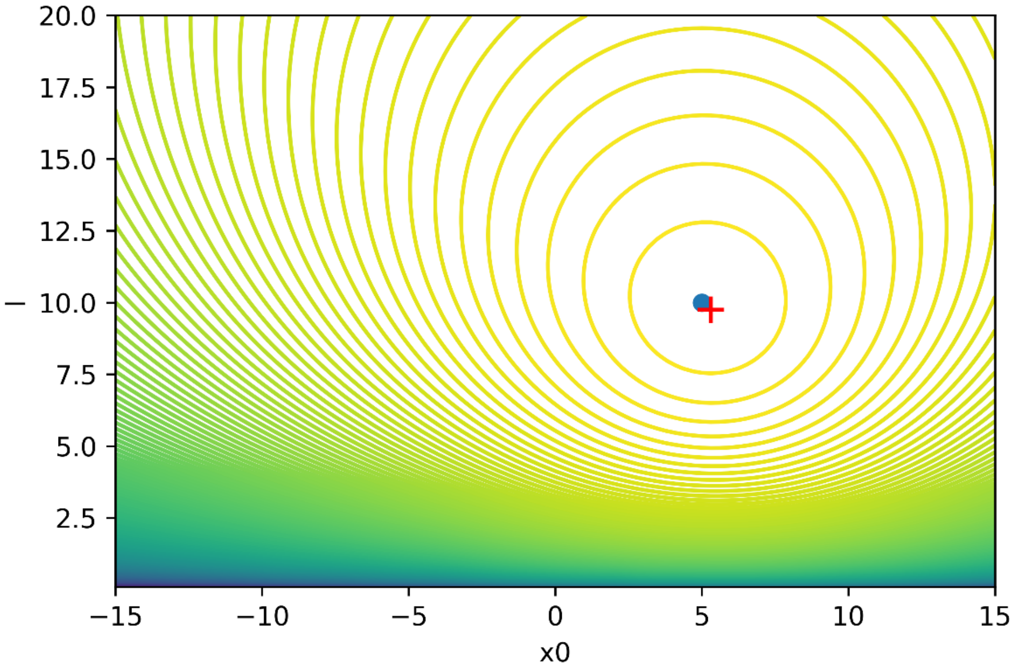
$x_0 = 5$ a $l = 10$

logaritmus věrohodnostní funkce →

✚ odhad polohy majáku:

$\hat{x}_0 = 5.303$ a $\hat{l} = 9.748$

(maximum věrohodnostní funkce)



Lineární regrese

`linearni-regrese-PH.xlsx`

2. Zadanou sadu hodnot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}_y$ proložte teoretickou lineární závislostí $y = ax + b$ pomocí metody lineární regrese.

x	y	σ_y
1.19	9.04	0.75
2.15	19.88	1.52
3.15	32.47	1.66
4.13	38.88	2.94
5.18	47.65	4.34
6.12	58.98	3.24
7.09	67.15	5.60
8.17	77.88	5.45
9.09	89.50	5.75
10.12	101.64	8.78
11.19	115.27	7.90
12.13	123.86	7.53
13.13	129.19	9.13
14.13	133.90	13.73
15.17	140.67	14.39
16.06	167.20	8.28
17.16	173.74	16.96
18.14	183.49	9.27
19.01	195.27	16.68
20.13	195.40	11.22
21.17	218.03	19.42
22.08	238.44	18.09
23.14	213.33	17.77
24.08	255.38	14.67

```
=LINREGRESE(E3:E26,D3:D26,NEPRAVDA,PRAVDA)
```

y hodnoty

x hodnoty

nulový konstantní parametr b

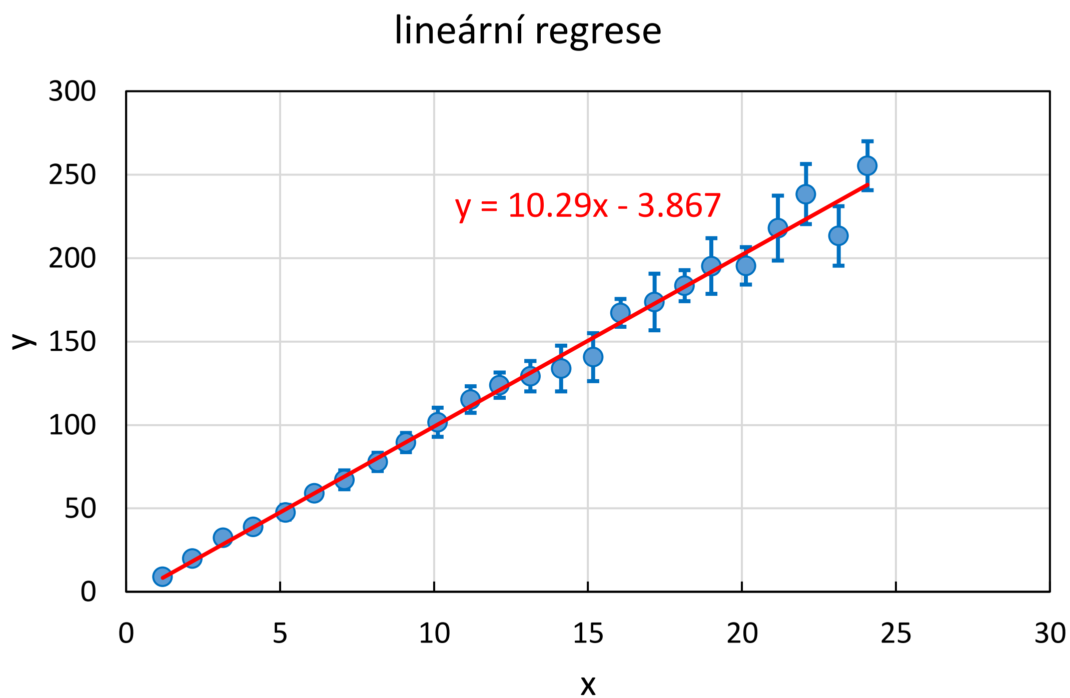
dodatečné regresní statistiky

Lineární regrese

2. Zadanou sadu hodnot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma_y}$ proložte teoretickou lineární závislostí $y = ax + b$ pomocí metody lineární regrese.

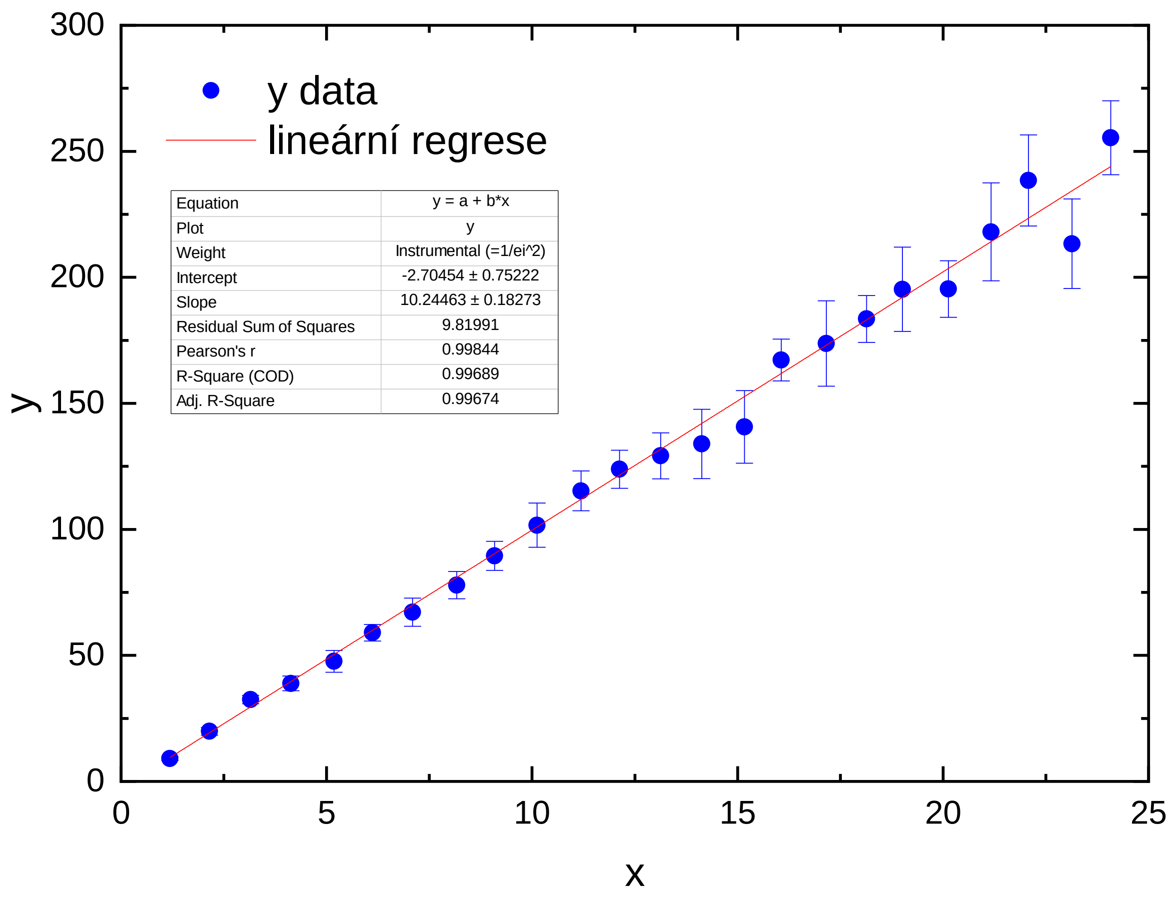
x	y	σ_y
1.19	9.04	0.75
2.15	19.88	1.52
3.15	32.47	1.66
4.13	38.88	2.94
5.18	47.65	4.34
6.12	58.98	3.24
7.09	67.15	5.60
8.17	77.88	5.45
9.09	89.50	5.75
10.12	101.64	8.78
11.19	115.27	7.90
12.13	123.86	7.53
13.13	129.19	9.13
14.13	133.90	13.73
15.17	140.67	14.39
16.06	167.20	8.28
17.16	173.74	16.96
18.14	183.49	9.27
19.01	195.27	16.68
20.13	195.40	11.22
21.17	218.03	19.42
22.08	238.44	18.09
23.14	213.33	17.77
24.08	255.38	14.67

```
=LINREGRESE(E3:E26,D3:D26,NEPRAVDA,PRAVDA)
```



2. Zadanou sadu hodnot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma_y}$ proložte teoretickou lineární závislostí $y = ax + b$ pomocí metody lineární regrese.

x	y	σ_y
1.19	9.04	0.75
2.15	19.88	1.52
3.15	32.47	1.66
4.13	38.88	2.94
5.18	47.65	4.34
6.12	58.98	3.24
7.09	67.15	5.60
8.17	77.88	5.45
9.09	89.50	5.75
10.12	101.64	8.78
11.19	115.27	7.90
12.13	123.86	7.53
13.13	129.19	9.13
14.13	133.90	13.73
15.17	140.67	14.39
16.06	167.20	8.28
17.16	173.74	16.96
18.14	183.49	9.27
19.01	195.27	16.68
20.13	195.40	11.22
21.17	218.03	19.42
22.08	238.44	18.09
23.14	213.33	17.77
24.08	255.38	14.67



Lineární regrese

linearni-regrese-PH.xlsx

2. Zadanou sadu hodnot $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma_y}$ proložte teoretickou lineární závislostí $y = ax + b$ pomocí metody lineární regrese.

x	y	σ_y
1.19	9.04	0.75
2.15	19.88	1.52
3.15	32.47	1.66
4.13	38.88	2.94
5.18	47.65	4.34
6.12	58.98	3.24
7.09	67.15	5.60
8.17	77.88	5.45
9.09	89.50	5.75
10.12	101.64	8.78
11.19	115.27	7.90
12.13	123.86	7.53
13.13	129.19	9.13
14.13	133.90	13.73
15.17	140.67	14.39
16.06	167.20	8.28
17.16	173.74	16.96
18.14	183.49	9.27
19.01	195.27	16.68
20.13	195.40	11.22
21.17	218.03	19.42
22.08	238.44	18.09
23.14	213.33	17.77
24.08	255.38	14.67

lineární regrese v Excelu

$a = 10.3 \pm 0.2$

$b = -4 \pm 3$

lineární regrese v Originu

$a = 10.2 \pm 0.2$

$b = -2.7 \pm 0.8$

$\mathrm{cov}(a, b) = -0.09$

metoda nejmenších čtverců v Excelu

$a = 10.2 \pm 0.2$

$b = -2.7 \pm 0.8$

$\mathrm{cov}(a, b) = -0.09$