Test 2b

Příklad 1 (5 bodů)
Při opakovaném měření elektrického proudu tekoucího rezistorem digitálním ampérmetrem se 4-místným displejem a přesností (0.5% + 2) byly naměřeny následující hodnoty: 1.371 mA, 1.457 mA, 1.430 mA, 1.389 mA, 1.321 mA, 1.415 mA, 1.394 mA, 1.387 mA, 1.394 mA, 1.404 mA. Rezistor je připojen ke zdroji napětí (3.5 ± 0.1) V.
Nalezněte odhad proudu tekoucího rezistorem a určete celkovou chybu proudu.
Nalezněte odhad elektrického odporu rezistoru a celkovou chybu odhadu odporu.

Řešení:
Odhad očekávané hodnoty proudu je aritmetický průměr naměřených hodnot
(počet hodnot je zde N = 10)

$$\hat{I} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_i = 1.396 \text{ mA}$$

Naměřené hodnoty proudu jsou výběrem z normálního rozdělení. Nepředpojatý odhad statistické chyby (neurčitosti typu A) jednoho měření je

$$\hat{\sigma}_A = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(I_i - \hat{I}\right)^2} = 0.036 \text{ mA}$$

Chyba odhadu proudu (t.j. chyba aritmetického průměru) je

$$\hat{\sigma}_I = \frac{\hat{\sigma}_A}{\sqrt{N}} = 0.011 \text{ mA}$$

Systematická chyba (neurčitost typu B) při měření daným ampérmetrem je

$$\hat{\sigma}_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(1.396 \times 0.005 + 2 \times 0.001) = 0.005 \text{ mA}$$

Celková neurčitost naměřené hodnoty proudu je

$$\hat{\sigma}_C = \sqrt{\hat{\sigma}_I{}^2 + \hat{\sigma}_B{}^2} = 0.012 \text{ mA}$$

Vypočítanou celkovou nejistotu zaokrouhlíme na jednu platnou číslici a výsledek měření proudu můžeme zapsat ve tvaru $\hat{I} = (1.40 \pm 0.01)$ mA.

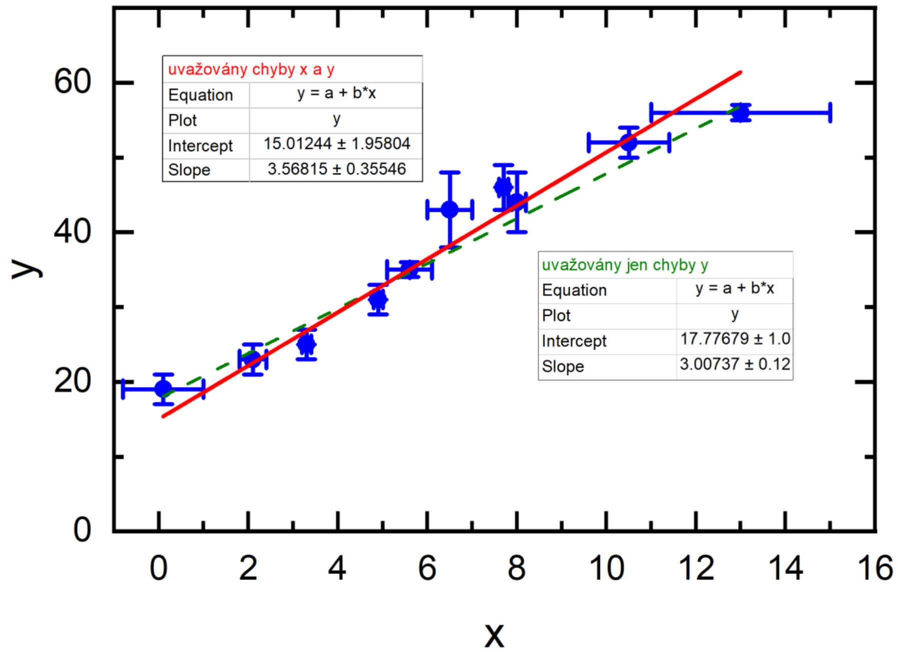
Nyní použijeme Ohmův zákon pro výpočet elektrického odporu rezistoru
$R = \frac{U}{I}$.
Za napětí dosadíme podle zadání 3.5 V a za proud 1.396 mA a dostaneme odhad hodnoty odporu
$\hat{R} = 2507\ \Omega$.
Abychom vypočítali chybu odhadu odporu, použijeme metodu přenosu chyb. Protože Ohmův zákon je podíl napětí a proudu je kvadrát relativní chyby odporu součet kvadrátů relativních chyb napětí a proudu $\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2$.
Po dosazení $\sigma_U = 0.1$ V, $U = 3.5$ V a $\sigma_I = 0.01$ mA, $I = 1.40$ mA dostáváme relativní chybu odhadu odporu $\frac{\sigma_R}{R} = 0.029$ a tedy absolutní chyba odhadu odporu je $\sigma_R = 0.07$ kΩ.
Elektrický odpor měřeného rezistoru je tedy $\hat{R} = (2.51 \pm 0.07)$ kΩ.

Příklad 2 (10 bodů)
Byly naměřeny následující hodnoty náhodné proměnné y v závislosti na náhodné proměnné x. Chyby naměřených hodnot x jsou označené σ_x , chyby naměřených hodnot y jsou označeny σ_y.

x	σ_x	y	σ_y
0.1	0.9	19	2
2.1	0.3	23	2
3.3	0.1	25	2
4.9	0.1	31	2
5.6	0.5	35	1
6.5	0.5	43	5
7.7	0.1	46	3
8.0	0.2	44	4
10.5	0.9	52	2
13	2	56	1

Nalezněte parametry přímky $y = ax + b$, která nejlépe vystihuje naměřenou závislost, a nejistoty těchto parametrů. Pro jakou hodnotu x_0 protíná nafitovaná přímka osu x a jaká je chyba odhadu tohoto průsečíku?

Řešení:
Na obrázku je naměřená závislost



Předpokládáme, že závislost y na x je obecná přímka $y = ax + b$ a parametry a, b najdeme metodou nejmenších čtverců. Protože jak závislá proměnná (y) tak nezávislá proměnná (x) jsou náhodné proměnné zatížené nejistotou, musíme uvažovat jak chyby hodnot y, tak chyby hodnot x. χ^2 tedy v tomto případě vypadá takto

$$\chi^2(a, b|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - f(x_i|a,b)\right)^2}{\sigma_{y_i}^2 + \sigma_{x_i}^2 f'^2(x_i|a,b)},$$

kde modelová funkce je $f(x_i|a,b) = ax_i + b$ a $f'(x_i|a,b)$ označuje derivaci modelové funkce podle nezávislé proměnné x, což je $f'(x_i|a,b) = a$.
Takže veličina χ^2 je v tomto případě

$$\chi^2(a, b|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{\sigma_{y_i}^2 + \sigma_{x_i}^2 a^2}.$$

Nyní je potřeba zjistit pro jakou hodnotu parametrů a, b nabývá χ^2globálního minima.
Protože váhy závisí na jednom z fitovaných parametrů (a) vede podmínka nulového totálního diferenciálu χ^2na soustavu dvou nelineárních rovnic pro dvě neznámé, která by se musela vyřešit numericky.
Výhodnější je použít iterativní minimalizaci, která je k dispozici v programu Origin (viz řešení https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/cizek/lr-exy.opju) nebo v Pythonu (viz řešení https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/cizek/lr-exy.html).
V obou případech dostaneme výsledek
$\hat{a} = 3.6 \pm 0.4$,
$\hat{b} = 15 \pm 2$,
Přímka s těmito parametry je nakreslená na obrázku červenou čarou.
Z kovarianční matice vypočítané v Originu nebo Pythonu zjistíme, že odhady parametrů $\hat{a}$ a $\hat{b}$ jsou záporně zkorelované a jejich kovariance je $\mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = -0.4$
Pro srovnání je na obrázku také fit přímkou, kdy byly uvažovány pouze chyby hodnot y. Je zřejmé, že pokud neuvažujeme i chyby náhodných proměnných x, tak dostaneme jinou přímku.

Přímka $y = \hat{a}x + \hat{b}$ protíná osu x pro takové x, že $y = 0$ Nalezení průsečíku modelové přímky $y = \hat{a}x + \hat{b}$ s osou x znamená tedy vypočítat z nafitovaných odhadů parametrů $\hat{a}$ a $\hat{b}$ hodnotu
$\hat{x}_0 = -\frac{\hat{b}}{\hat{a}}$.
Pro naše konkrétní hodnoty to je $\hat{x}_0 = -4.2$. Chybu odhadu $\hat{x}_0$ vypočítáme metodou přenosu chyb. Je, ale potřeba vzít v úvahu, že odhady parametrů $\hat{a}$ a $\hat{b}$ nejsou nezávislé, ale jsou záporně zkorelované. Rozptyl odhadu $\hat{x}_0$ spočítáme tedy aplikací vztahu
$$\sigma_{\hat{x}_0}^2 = \left(\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{a}}\right)^2 \sigma_{\hat{a}}^2 + \left(\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{b}}\right)^2 \sigma_{\hat{b}}^2 + 2\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{a}}\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{b}}\mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}).$$
Příslušné parciální derivace jsou
$$\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{a}} = \frac{\hat{b}}{\hat{a}^2},$$
$$\frac{\partial \hat{x}_0}{\partial \hat{b}} = -\frac{1}{\hat{a}}.$$
Dosadíme je do vztahu pro rozptyl a vyjde nám
$$\sigma_{\hat{x}_0}^2 = \left(\frac{\hat{b}}{\hat{a}^2}\right)^2 \sigma_{\hat{a}}^2 + \left(\frac{1}{\hat{a}}\right)^2 \sigma_{\hat{b}}^2 - 2\frac{\hat{b}}{\hat{a}^2}\frac{1}{\hat{a}}\mathrm{cov}(\hat{a}, \hat{b}).$$
Po dosazení konkrétních hodnot dostaneme, že chyba odhadu polohy průsečíku je $\sigma_{\hat{x}_0} = 0.2$.
Odhad polohy průsečíku naměřené závislosti s osou x je tedy $\hat{x}_0 = -4.2 \pm 0.9$.