Test 2

Příklad 1 (5 bodů)

Při měření elektrického odporu drátu o délce *l* = (1.545 ± 0.001) m a kruhovém průřezu o průměru *d* = (0.45 ± 0.01) mm byly naměřeny následující hodnoty: 1.33 Ω, 1.35 Ω , 1.30 Ω, 1.32 Ω, 1.33 Ω. Určete měrný elektrický odpor drátu a jeho chybu.

Řešení:

Naměřené hodnoty elektrického odporu jsou výběrem z normálního rozdělení. Odhad očekávané hodnoty elektrického odporu je aritmetický průměr naměřených hodnot $\hat{\mu} = \sum_i \frac{R_i}{N} = 1.326\ \Omega$

Odhad standardní odchylky (chyba jednoho měření) je $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_i \frac{(R_i - \bar{R})^2}{N-1}} = 0.018\ \Omega$

Chyba odhadu elektrického odporu je chyba aritmetického průměru $\hat{\sigma}_R = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} = 0.0081\ \Omega$.

Tedy naměřená hodnota elektrického odporu je *R* = (1.326 ± 0.008) Ω

Elektrický odpor drátu o délce *l* a průměru *d* je $= \varrho \frac{4l}{\pi d^2}$. Takže měrný elektrický odpor je

$\varrho = R \frac{\pi d^2}{4l} = 13.6\ \times 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$

Protože se jedná o čistý součin a podíl je kvadrát relativní chyby měrného elektrického odporu

$\left(\frac{\sigma_\varrho}{\varrho}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2$

Po dosazení konkrétních hodnot dostáváme relativní chybu měrného elektrického odporu

$\frac{\sigma_\varrho}{\varrho} = 0.045$

a tedy chyba elektrického odporu je $\sigma_\varrho = 0.6\ \times 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$

Tedy naměřená hodnota měrného elektrického odporu je $\varrho = (13.6\ \pm\ 0.6)\ \times 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$.

Příklad 2 (10 bodů)

Byly naměřeny následující hodnoty náhodné proměnné y v závislosti na parametru x. Chyby naměřených hodnot y jsou ve třetím sloupci označeném σ_y.

x	y	σ_y
3.35	0.52567	0.4
12	0.75341	0.1
13	0.73182	0.1
14	0.80272	0.2
19	1.0902	0.1
26	0.99461	0.1
29	1.17407	0.1
39	1.6893	0.2
42	1.25799	0.1
50	1.44744	0.1
74	1.70438	0.1
79	2.19436	0.2
82	2.15621	0.1

Podle jedné teorie je závislost y na x přímá úměrnost, tj. $y = ax$, kde *a* je nějaký parametr.

Podle druhé teorie je y úměrné odmocnině z x, tj. je to závislost $y = b\sqrt{x}$, kde *b* je jiný parametr.

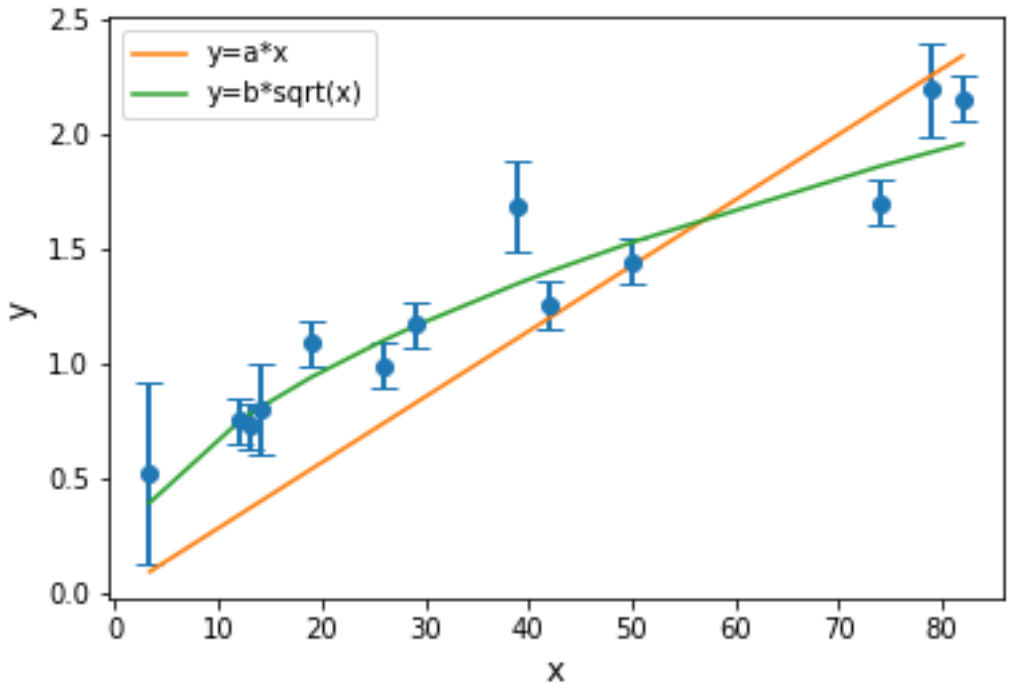
Najděte nejlepší odhad parametru a a b pro oba modely a chybu tohoto odhadu.

Pomocí χ^2 testu rozhodněte, která z obou teorií je v souladu s naměřenými daty.

Řešení:
Řešení v Originu je v souboru https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/cizek/zavislost.opju
Řešení v Pythonu je v souboru https://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/upf/cizek/zavislost.py

Uvažujme nejdříve model 1, tj. že danou závislost je možné popsat přímkou procházející počátkem, $y = ax$. Nejlepší odhad směrnice přímky vypočítaný metodou nejmenších čtverců je
$\hat{a} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}$,
kde lomené závorky znamenají součet hodnot v závorce vážený převrácenou hodnotou kvadrátu chyby, např.
$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}$ nebo $\langle 1 \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$, kde N je počet naměřených hodnot (v našem případě N = 13)
Chyba odhadu parametru $\hat{a}$ vypočítaná metodou přenosu chyb je
$\sigma_{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}$.
Po dosazení naměřených hodnot dostaneme $\hat{a} = (0.0286 \pm 0.0007)$. Tato přímka je nakreslená na obrázku oranžovou čarou.
Abychom zjistili, jestli je modelová funkce $y = ax$ v souladu s naměřenými hodnotami provedeme χ^2 test kvality fitu. Hodnota testovací statistiky
$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \hat{a}x_i)^2}{\sigma_i^2}$
pro fit přímkou procházející počátkem je $\chi^2 = 112.31$. Počet stupňů volnosti je v tomto případě $k = N - 1 = 12$, protože máme jeden fitovaný parametr. Očekávaná hodnota χ^2 rozdělení je tedy 12. P-hodnotu, tj. pravděpodobnost, že náhodná proměnná, která je výběrem z χ^2 rozdělení s počtem stupňů volnosti 12, je 112.31 nebo ještě větší, vypočítáme s použitím distribuční funkce χ^2 rozdělení jako
$P = 1 - F_{\chi^2}(112.31|12) = 2 \times 10^{-18}$.
Pozn. hodnotu distribuční funkce χ^2 rozdělení můžeme vypočítat např. v Pythonu pomocí funkce `chi2.cdf` z knihovny `scipy.stats` nebo v Excelu pomocí funkce `CHIDIST`. Hodnota $P = 2 \times 10^{-18}$ je evidentně nižší než hladina signifikance 5% a proto můžeme konstatovat, že přímka procházející počátkem není v souladu s naměřenou závislostí.

Nyní uvažujme druhý model $y = b\sqrt{x}$. Aplikací metody nejmenších čtverců dostaneme nejlepší odhad parametru $\hat{b} = (0.216 \pm 0.005)$. Získaná modelová funkce je nakreslená na obrázku zelenou čarou.
Pozn. K výpočtu je možné v Pythonu použít funkci `curve_fit` z knihovny `scipy_optimize` nebo v Originu položku Analysis→Fitting→Nonlinear Curve Fit.
Ověříme opět kvalitu fitu pomocí χ^2 testu. Hodnota χ^2 testovací statistiky je
$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \hat{a}\sqrt{x_i})^2}{\sigma_i^2} = 17.49$
Počet stupňů volnosti je opět $k = N - 1 = 12$, protože máme zase jeden fitovací parametr.
P-hodnotu, tj. pravděpodobnost, že náhodná proměnná, která je výběrem z χ^2 rozdělení s počtem stupňů volnosti 12, je 17.49 nebo ještě větší vypočítáme opět použitím distribuční funkce χ^2 rozdělení jako
$P = 1 - F_{\chi^2}(17.49|12) = 0.132$.
Protože hodnota $P = 0.132$ je vyšší než hladina signifikance 5% je zřejmé, že odmocninová závislost je v souladu s naměřenými daty.


y=a*x
y=b*sqrt(x)
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
y
0
10
20
30
40
50
60
70
80
x