Test 1 B

1.(5 bodů) Ampérmetr má třídu přesnosti P = 1.5. Tímto přístrojem měříme proud na rozsahu 0-1 A. Jaká je pravděpodobnost, že se naměřená hodnota se bude od skutečné odchylovat o méně než 10 mA? Vypočítejte pravděpodobnost, že pokud si koupíme tři takové přístroje, tak budou mít všechny odchylku od skutečné hodnoty menší než 10 mA.

Řešení

Maximální systematická chyba při měření tímto ampérmetrem na rozsahu 0-1 A je $\varepsilon = P\,R/100$. Po dosazení P = 1.5 a R = 1 A dostáváme ε =.15 mA. Protože absolutní odchylka náhodně vybraného ampérmetru od správné hodnoty se může vyskytovat se stejnou pravděpodobností kdekoliv v intervalu $(0, \varepsilon)$ je pravděpodobnost, že odchylka našeho konkrétního ampérmetru od správné hodnoty bude menší než 10 mA je rovna 10/15 = 2/3.

Pravděpodobnost, že tři kusy tohoto ampérmetru budou všechny vykazovat menší odchylku od správné hodnoty než 10 mA můžeme vypočítat pomocí binomického rozdělení. Úspěch je, že daný ampérmetr bude vykazovat menší odchylku od správné hodnoty než 10 mA, počet opakování experimentu je N = 3 (tj. kolik přístrojů jsme vyzkoušeli) a pravděpodobnost, že při jednom opakování nastane úspěch je p = 2/3 (tj. pravděpodobnost, že jeden náhodně vybraný ampérmetr bude vykazovat menší odchylku od správné hodnoty než 10 mA). Pravděpodobnost, že 3-krát nastane úspěch je dána binomickým rozdělením

$$P(k=3|N=3, p=2/3) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k} = \frac{3!}{3!\,0!}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0.296$$

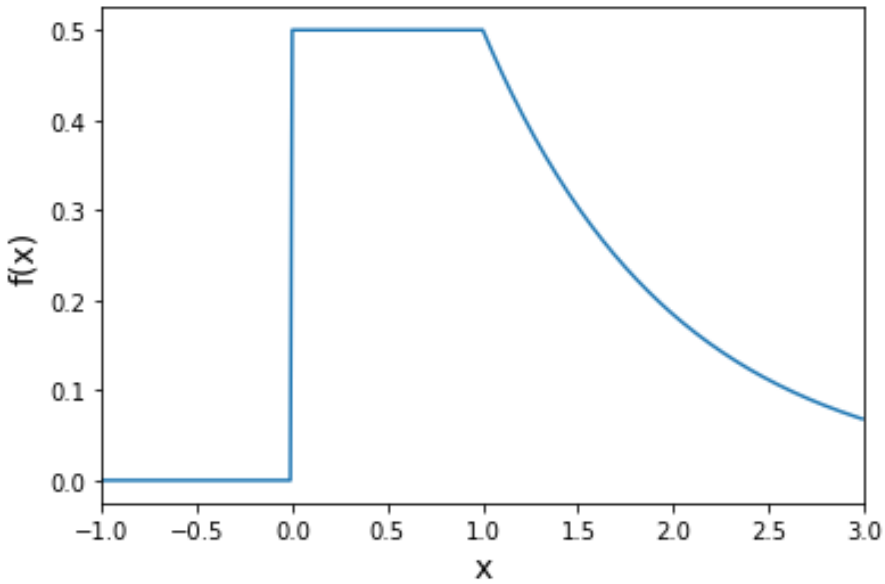
2.(10 bodů) Hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné x je popsaná funkcí

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle \\ \frac{1}{2}e^{-(x-1)} & \text{pro} \quad x > 1 \end{cases}$$

Vypočítejte distribuční funkci toho rozdělení. Vypočítejte také očekávanou hodnotu a medián této náhodné proměnné.

Řešení

Hustota pravděpodobnosti f je nakreslena na následujícím obrázku



Nejdříve ověříme, že hustota pravděpodobnosti *f* je normovaná.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-1)}dx = 0 + \frac{1}{2}[x]_0^1 + \frac{1}{2}\left[-e^{-(x-1)}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Distribuční funkce *F* je definovaná vztahem $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Pro výpočet distribuční funkce je nutné rozlišit jednotlivé možnosti:

pro $x < 0$ je $F(x) = 0$

pro $x \in \langle 0,1 \rangle$ je $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}[t]_0^x = \frac{x}{2}$.

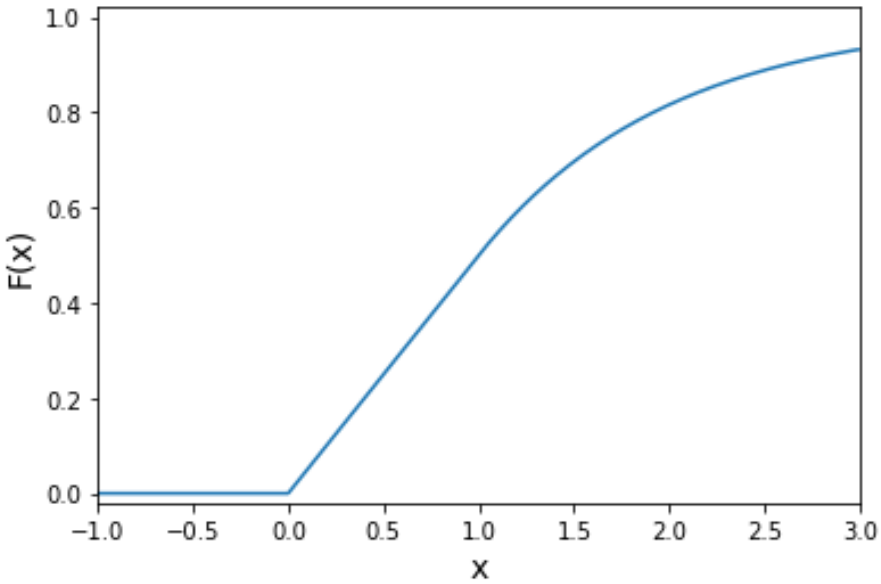
pro $x > 1$ je $F(x) = F(1) + \int_1^x \frac{1}{2}e^{-(t-1)}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-(t-1)}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-(x-1)}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2}e^{-(x-1)}$

Distribuční funkce je tedy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1 \rangle \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{-(x-1)} & \text{pro} \quad x > 1 \end{cases}$$

a je nakreslena na následujícím grafu.



Medián je taková hodnota x_m pro kterou je $F(x_m) = \frac{1}{2}$. To nastává pro $x_m = 1$. Takže medián je 1.

Očekávanou hodnotu μ spočítáme jako integrál

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{2}dx + \int_1^{\infty} \frac{x}{2}e^{-(x-1)}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{x}{2}e^{-(x-1)}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-1)}dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}e^{-(x-1)}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

kde pro výpočet integrálu $\int_1^{\infty} \frac{x}{2}e^{-(x-1)}dx$ byla použita metoda *per partes.*

Očekávaná hodnota náhodné proměnné *x* je tedy $\mu = \frac{5}{4}$.