

# Maximální chyba

- není to chyba
- ve statistice se nazývá **rozsah**
- použití maximální chyby:
  1. hrubý řádový odhad nejistoty měření
  2. zavedení třídy přesnosti měřících přístrojů
- nelze použít na vyhodnocení nejistoty naměřených hodnot

# Maximální chyba

• **neúplná čísla:**  $a = \hat{\mu}_a \pm \varepsilon_a$      $b = \hat{\mu}_b \pm \varepsilon_b$

• **součet:**  $S = a + b = (\hat{\mu}_a + \hat{\mu}_b) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$

- absolutní maximální chyba:  $\varepsilon_S = (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$

- relativní maximální chyba:  $\eta_S = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{\hat{\mu}_a + \hat{\mu}_b}$

• **rozdíl:**  $R = a - b = (\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_b) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$

- absolutní maximální chyba:  $\varepsilon_R = (\varepsilon_a + \varepsilon_b)$

- relativní maximální chyba:  $\eta_R = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{\hat{\mu}_a - \hat{\mu}_b}$

**sčítají se absolutní  
maximální chyby**

# Maximální chyba

• **součin:**  $N = ab = (\hat{\mu}_a \hat{\mu}_b) \pm (\varepsilon_a \hat{\mu}_b + \varepsilon_b \hat{\mu}_a)$

- absolutní maximální chyba:  $\varepsilon_N = \varepsilon_a \hat{\mu}_b + \varepsilon_b \hat{\mu}_a$

- relativní maximální chyba:  $\eta_N = \frac{\varepsilon_a \hat{\mu}_b + \varepsilon_b \hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_a \hat{\mu}_b} = \eta_a + \eta_b$

**sčítají se relativní maximální chyby**

• **podíl:**  $P = \frac{a}{b} = \left( \frac{\hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_b} \right) \pm \left( \frac{\varepsilon_a}{\hat{\mu}_b} + \varepsilon_b \frac{\hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_b^2} \right)$

- absolutní maximální chyba:  $\varepsilon_P = \frac{\varepsilon_a}{\hat{\mu}_b} + \varepsilon_b \frac{\hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_b^2}$

- relativní maximální chyba:  $\eta_P = \left( \frac{\varepsilon_a}{\hat{\mu}_b} + \varepsilon_b \frac{\hat{\mu}_a}{\hat{\mu}_b^2} \right) \frac{\hat{\mu}_b}{\hat{\mu}_a} = \eta_a + \eta_b$

# Maximální chyba

• **mocnina:**  $M = a^n = \hat{\mu}_a^n \pm n\hat{\mu}_a^{n-1}\varepsilon_a$

$$\varepsilon_M = n\hat{\mu}_a^{n-1}\varepsilon_a$$

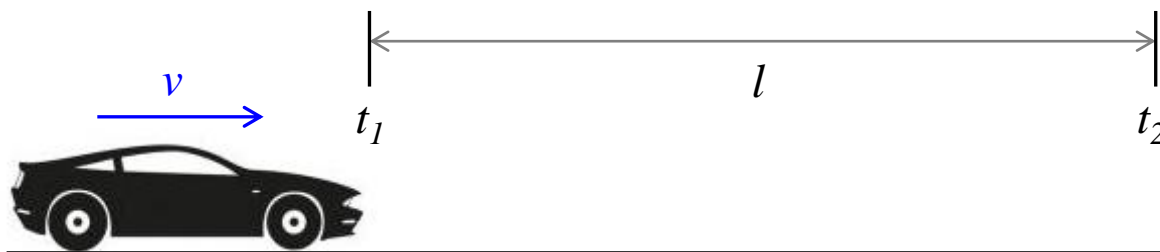
$$\eta_M = n\eta_a$$

# Maximální chyba

- řádový odhad přesnosti měření

*příklad:* úsekové měření rychlosti

Jak přesně musí měřit čas stopky v kamerách používaných pro měření překročení rychlosti aut?



průměrná rychlost auta:  $v = \frac{l}{\Delta t}$  kde  $\Delta t = t_2 - t_1$

relativní maximální chyba rychlosti:  $\frac{\varepsilon_v}{v} = \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{\varepsilon_{\Delta t}}{\Delta t}$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{\Delta t} = \varepsilon_{t_1} + \varepsilon_{t_2} \\ \varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2} \equiv \varepsilon_t \end{array} \right\} \varepsilon_{\Delta t} = 2\varepsilon_t \quad \Delta t = \frac{l}{v}$$

relativní maximální chyba rychlosti:  $\frac{\varepsilon_v}{v} = \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{2\varepsilon_t}{l}v$

absolutní maximální chyba rychlosti:  $\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_l}{l}v + \frac{2\varepsilon_t}{l}v^2$

konkrétní hodnoty:

$$v = 100 \text{ km/h} = 28 \text{ m/s}$$

$$l = 100 \text{ m} \quad \varepsilon_l = 1 \text{ m}$$

$$\varepsilon_t = 0.1 \text{ s}$$



$$\varepsilon_v = 1.8 \text{ m/s} = 6.7 \text{ km/h}$$

# Maximální chyba

- řádový odhad přesnosti měření

*příklad:* úsekové měření rychlosti

Jak přesně musí měřit čas stopky v kamerách používaných pro měření překročení rychlosti aut?



průměrná rychlost auta:  $v = \frac{l}{\Delta t}$  kde  $\Delta t = t_2 - t_1$

relativní maximální chyba rychlosti:  $\frac{\varepsilon_v}{v} = \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{\varepsilon_{\Delta t}}{\Delta t}$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{\Delta t} = \varepsilon_{t_1} + \varepsilon_{t_2} \\ \varepsilon_{t_1} = \varepsilon_{t_2} \equiv \varepsilon_t \end{array} \right\} \varepsilon_{\Delta t} = 2\varepsilon_t \quad \Delta t = \frac{l}{v}$$

relativní maximální chyba rychlosti:  $\frac{\varepsilon_v}{v} = \frac{\varepsilon_l}{l} + \frac{2\varepsilon_t}{l}v$

absolutní maximální chyba rychlosti:  $\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_l}{l}v + \frac{2\varepsilon_t}{l}v^2$

konkrétní hodnoty:

$$v = 100 \text{ km/h} = 28 \text{ m/s}$$

$$l = 100 \text{ m} \quad \varepsilon_l = 1 \text{ m}$$

$$\varepsilon_t = 0.01 \text{ s}$$



$$\varepsilon_v = 0.4 \text{ m/s} = 1.6 \text{ km/h}$$

# Třída přesnosti

- statistické šetření na sérii vyrobených měřicích přístrojů

$X_0$  – nominální hodnota získaná měřením přístrojem s podstatně vyšší přesností

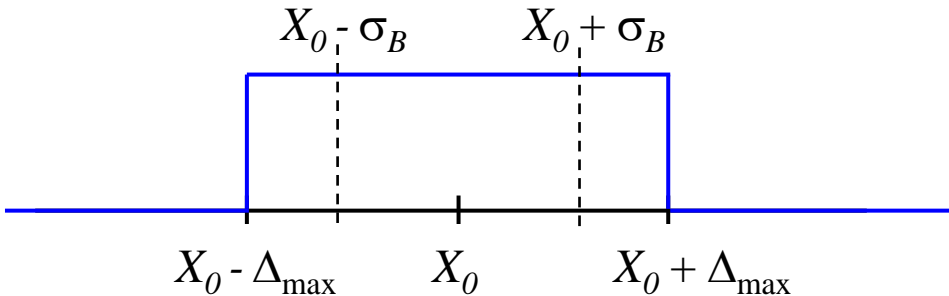
$\Delta_i = |X_i - X_0|$       odchylka  $i$ -tého přístroje

$\Delta_{\max}$  - maximální odchylka

• **třída přesnosti:**  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$

řada  $P = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5 - 1 - 1.5 - 2.5 - 5$

- rovnoměrné rozdělení v intervalu  $(-a, a)$ :



$R$  – rozsah stupnice,  $R = x_{\max} - x_{\min}$

$$\sigma_B^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3} = \frac{\Delta_{\max}^2}{3}$$

**systematická chyba:**

$$\sigma_B = \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}} \approx 0.58 \Delta_{\max}$$

- rovnoměrné rozdělení: v intervalu  $(-\sigma_B, \sigma_B)$  kolem odhadnuté hodnoty měřené veličiny se skutečná (správná) hodnota měřené veličiny nachází s pravděpodobností  $P = 0.58$

# Třída přesnosti

- statistické šetření na sérii vyrobených měřicích přístrojů

$X_0$  – nominální hodnota získaná měřením přístrojem s podstatně vyšší přesností

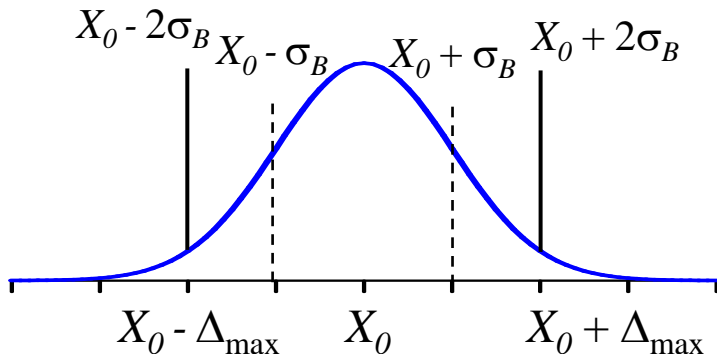
$\Delta_i = |X_i - X_0|$       odchylka  $i$ -tého přístroje

$\Delta_{\max}$  - maximální odchylka

- **třída přesnosti:**  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$

řada  $P = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5 - 1 - 1.5 - 2.5 - 5$

- normální rozdělení:  $4\sigma_B = 2\Delta_{\max}$



$R$  – rozsah stupnice,  $R = x_{\max} - x_{\min}$

- Gaussián  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} \exp\left[-\frac{(x - X_0)^2}{2\sigma_B^2}\right]$

**systematická chyba:**

$$\sigma_B = \frac{1}{2} \Delta_{\max} = 0.5 \Delta_{\max}$$

- normální rozdělení: v intervalu  $(-\sigma_B, \sigma_B)$  kolem odhadnuté hodnoty měřené veličiny se skutečná (správná) hodnota měřené veličiny nachází s pravděpodobností  $P = 0.68$



# Třída přesnosti

- statistické šetření na sérii vyrobených měřicích přístrojů

$X_0$  – nominální hodnota získaná měřením přístrojem s podstatně vyšší přesností

$\Delta_i = |X_i - X_0|$       odchylka  $i$ -tého přístroje

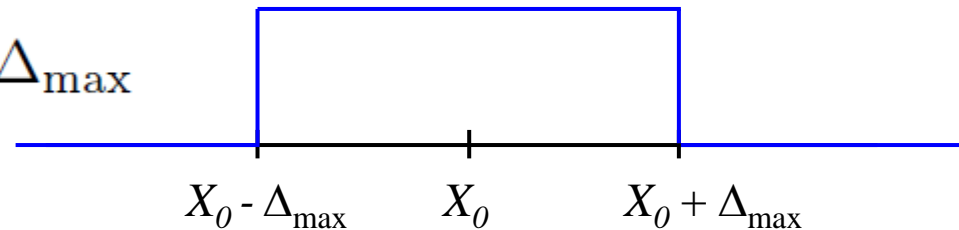
$\Delta_{\max}$  - maximální odchylka

• **třída přesnosti:**  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$

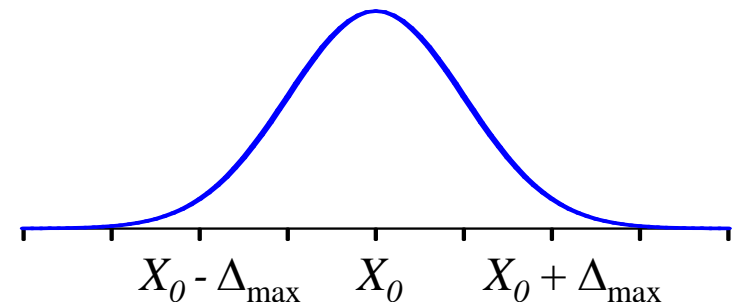
$R$  – rozsah stupnice,  $R = x_{\max} - x_{\min}$

řada  $P = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5 - 1 - 1.5 - 2.5 - 5$

• rovnoměrné rozdělení:  $\sigma_B = \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}} \approx 0.58\Delta_{\max}$



• normální rozdělení:  $\sigma_B = \frac{1}{2}\Delta_{\max} = 0.5\Delta_{\max}$



# Třída přesnosti

- statistické šetření na sérii vyrobených měřicích přístrojů

$X_0$  – nominální hodnota získaná měřením přístrojem s podstatně vyšší přesností

$\Delta_i = |X_i - X_0|$       odchylka  $i$ -tého přístroje

$\Delta_{\max}$  - maximální odchylka

- **třída přesnosti:**  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$

$R$  – rozsah stupnice,  $R = x_{\max} - x_{\min}$

řada  $P = 0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5 - 1 - 1.5 - 2.5 - 5$

- rovnoměrné rozdělení:  $\sigma_B = \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}} \approx 0.58\Delta_{\max}$

- systematická chyba:

$$\sigma_B = \frac{PR}{\sqrt{3}} 10^{-2}$$

# Třída přesnosti

- **třída přesnosti:**  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$   $R$  – rozsah stupnice

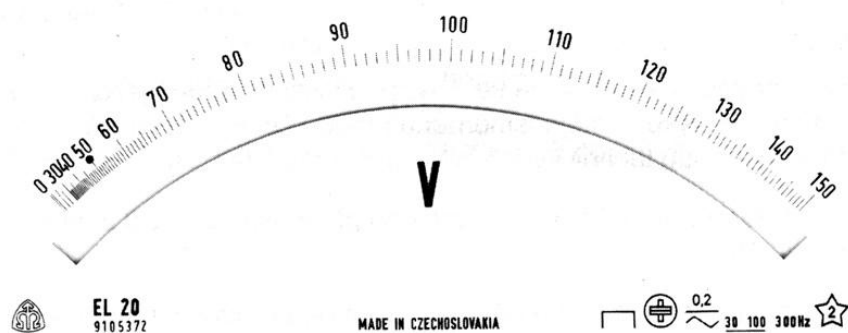
- **příklad:** Rozsah ampérmetru je  $R = 3$  A, třída přesnosti  $P = 1.5$

Absolutní chyba (nejistota) měření proudu na tomto rozsahu je:

$$\sigma_B = \frac{P R}{\sqrt{3}} 10^{-2} = \frac{1.5 \times 3}{\sqrt{3}} 10^{-2} \text{ A} = 0.026 \text{ A}$$

- **Poznámka:** Z důvodů minimalizace relativní nejistoty (chyby) měření je nutno měřit v *horní polovině stupnice* ručkového měřicího přístroje

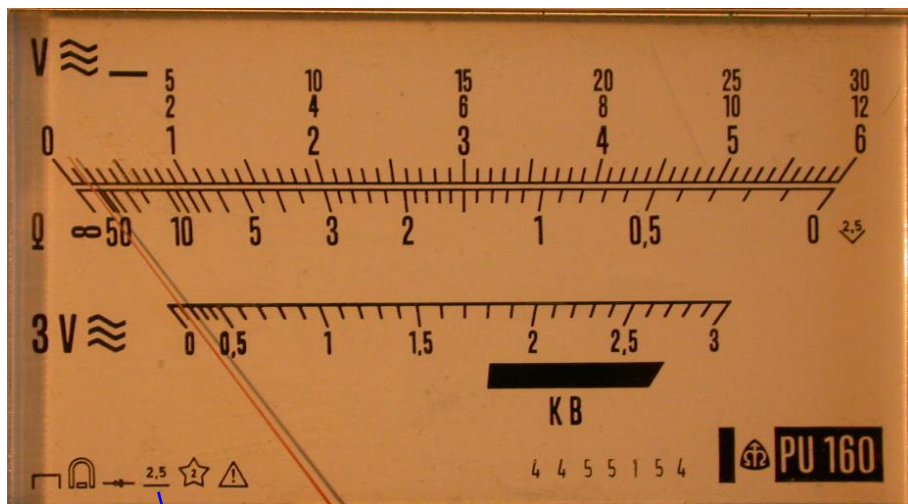
- dělení měřicích přístrojů podle třídy přesnosti:



$p$	<i>Kategorie</i>
0.1	etalony, normály
0.2	cejchovní
0.5	laboratorní
1	laboratorní
1.5	provozní
2.5	provozní

# Značení elektrických měřicích přístrojů

Brož J., a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN Praha 1967, tab.1.1 a tab. 1.2 str.208



třída přesnosti 2.5

Tabulka 1,2

Některé značky na měřicích přístrojích

Měřicí přístroj na proud	stejnoseměrný	—
	střídavý	~
	stejnoseměrný i střídavý	⎓
	střídavý třífázový s jedním měřicím systémem	⏚
Poloha stupnice	svislá	⊥
	vodorovná	┌
	šikmá s udáním úhlu	∠60°
Zkušební napětí isolační	500 V	☆
	1 000 V	☆1
Označení třídy přesnosti 1,5		<b>1,5</b>
Označení uzemňovací svorky		⏏

# Značení elektrických měřicích přístrojů

Brož J., a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN Praha 1967, tab.1.1 a tab. 1.2 str.208



Tabulka 1,2

Některé značky na měřicích přístrojích

Měřicí přístroj na proud	stejnoseměrný	—
	střídavý	~
	stejnoseměrný i střídavý	⎓
	střídavý třífázový s jedním měřicím systémem	⏚
Poloha stupnice	svislá	⊥
	vodorovná	┌
	šikmá s udáním úhlu	∠60°
Zkušební napětí isolační	500 V	☆
	1 000 V	☆1
Označení třídy přesnosti 1,5		<b>1,5</b>
Označení uzemňovací svorky		⏏

## Zobecnění třídy přesnosti i na další měřicí přístroje

- třída přesnosti:  $P = \frac{\Delta_{\max}}{R} 100\%$        $R$  – rozsah stupnice
- odhad absolutní chyby z dělení stupnice
- předpokládáme rovnoměrné dělení stupnice v intervalu  $(-a, a)$
- volíme  $a = \Delta =$  nejmenější dílek stupnice

**systematická chyba:**  $\sigma_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.58\Delta$

## Zobecnění třídy přesnosti i na další měřicí přístroje

- Příklad: Při měření posuvným měřidlem je  $\Delta = 0.05$  mm.

Chybu měření pak odhadneme jako  $\sigma_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0.05}{\sqrt{3}} \text{ mm} \approx 0.03 \text{ mm}$



# Zobecnění třídy přesnosti i na další měřicí přístroje

- Příklad: Při měření mikrometrem je  $\Delta = 0.01$  mm.

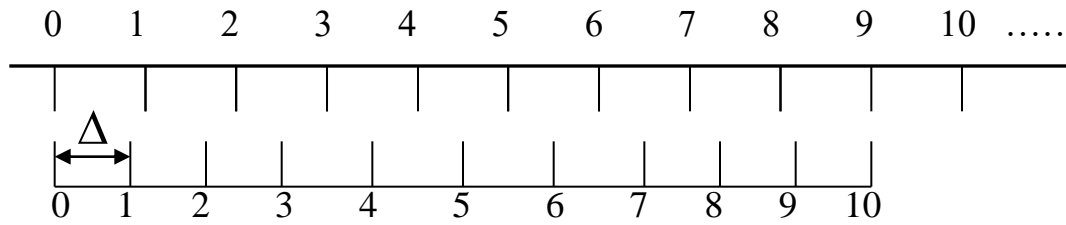
Chybu měření pak odhadneme jako  $\sigma_B = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0.01}{\sqrt{3}} \text{ mm} \approx 0.006 \text{ mm}$



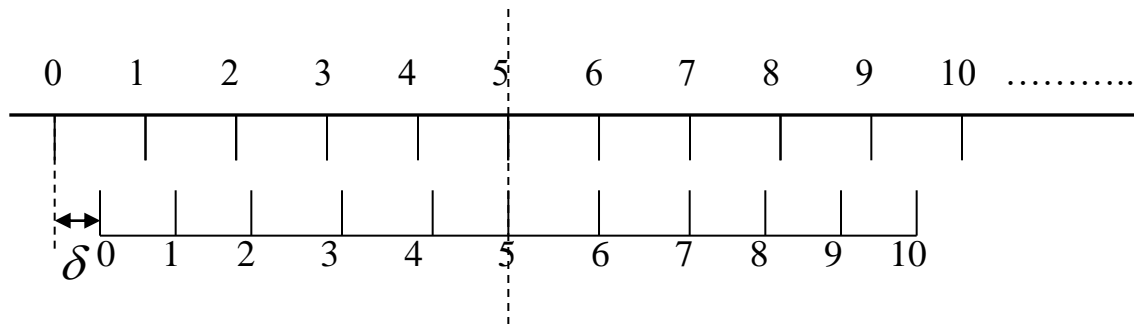


# Nonium

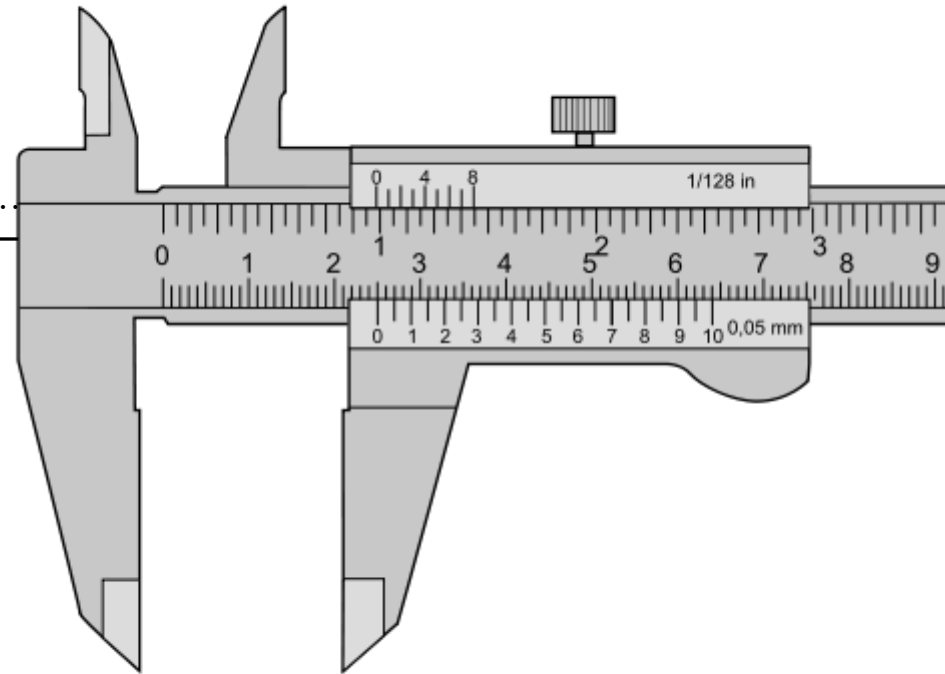
nonium (Vernier)



$$\Delta = \frac{9}{10}$$



$$\delta + m\Delta = m \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{m}{10}$$



# Digitální měřicí přístroje

- analogově – digitální (A-D) převodník
- dva zdroje chyb:

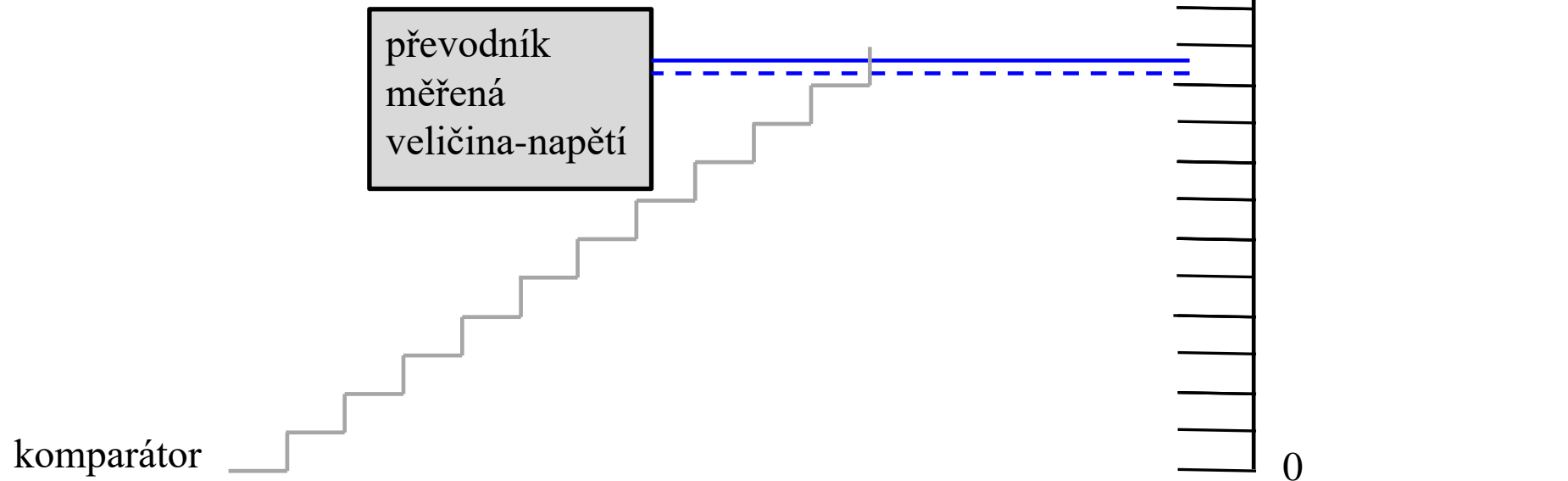
$N$ -bitový převodník: počet binů  $2^N$

## 1. konečná šířka binu $R / 2^N$ (least significant bit = LSB)

- změny měřeného napětí menší než šířka binu není možné detekovat
- vyjádřena v násobcích posledního digitu zobrazené hodnoty

## 2. nelinearita převodníku

- nedokonalost komparátoru
- vyjádřena jako maximální chyba v procentech naměřené hodnoty



# Digitální měřicí přístroje

Maximální chyba se vyjadřuje většinou v procentech naměřené hodnoty + násobek poslední platné číslice zobrazené na displeji



## Specifikace :

### Základní funkce

Měření DC napětí

Měření AC napětí

Měření DC proudu

Měření AC proudu

Měření odporu

Měření kapacity

Měření teploty ve °C

Měření teploty ve °F

Měření kmitočtu

### Rozsah

600mV / 6V / 60V / 600V / 1000V

600mV / 6V / 60V / 600V / 1000V

600μA / 6000μA / 60mA / 600mA / 10A

600μA / 6000μA / 60mA / 600mA / 10A

600Ω / 6kΩ / 60kΩ / 600kΩ / 6MΩ / 60MΩ

6nF / 60nF / 600nF / 6mF / 60mF / 600mF / 6mF

- 40°C až do + 1000°C

- 40°F až do + 1832°F

60Hz / 60kHz / 600kHz / 6MHz / 60MHz

### Přesnost

+/- (0,3% + 2)

+/- (0,6% + 5)

+/- (0,5% + 3)

+/- (1% + 5)

+/- (0,5% + 2)

+/- (2% + 5)

+/- (1% + 3)

+/- (1,5% + 5)

+/- (0,1% + 3)

# Digitální měřicí přístroje

Příklad: Metex 3850, naměříme hodnotu stejnosměrného napětí  $U = 3.512 \text{ V}$  na rozsahu 4V.

## 8-2. Special Characteristics.

MODEL	FUNCTION	RANGE	ACCURACY	RESOLUTION	
M-3850	DC VOLTAGE	400 mV	$\pm 0.3\%$ of rdg +1 dgt	100 $\mu\text{V}$	
		4 V		1 mV	
M-3830	AC VOLTAGE	40 V	$\pm 0.8\%$ of rdg +3dgt	10 mV	
		400 V		100 mV	
		1000 V		$\pm 0.5\%$ of rdg +1 dgt	1 V
		750 V		$\pm 1.0\%$ of rdg +3 dgt	1 V



Přístroj má 4-místný displej. Podle údajů výrobce je chyba 0.3% naměřené hodnoty plus 0.001 V, tj.  $\Delta = 0.003 \times 3.512 + 0.001 \text{ V} = 0.012 \text{ V}$ ,  $\sigma_B = \Delta/\sqrt{3} = 0.007 \text{ V}$   
Výsledek měření je tedy  $U = (3.512 \pm 0.007) \text{ V}$ .