Korelace

Dokažte, že korelace $\varrho(x,y) = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$ leží vždy v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$

Řešení:

Uděláme náhodnou proměnnou $z = \lambda x + y$, kde λ může být libovolné reálné číslo.

$$\sigma_z^2 = E[z^2] - (E[z])^2 = E[(\lambda x + y)^2] - (E[(\lambda x + y)])^2 = E[\lambda^2 x^2 + 2\lambda xy + y^2] - (\lambda E[x] + E[y])^2 =$$

$$= \lambda^2 E[x^2] + 2\lambda E[xy] + E[y^2] - \lambda^2 (E[x])^2 - 2\lambda E[x]E[y] - (E[y])^2 =$$

$$= \lambda^2 \underbrace{(E[x^2] - (E[x])^2)}_{\sigma_x^2} + 2\lambda \underbrace{(E[xy] - E[x]E[y])}_{\mathrm{cov}(x,y)} + \underbrace{E[y^2] - (E[y])^2}_{\sigma_y^2} = \lambda^2 \sigma_x^2 + 2\lambda\, \mathrm{cov}(x,y) + \sigma_y^2$$

Pro každé reálné číslo λ musí být $\lambda^2 \sigma_x^2 + 2\lambda\, \mathrm{cov}(x,y) + \sigma_y^2 \geq 0$

Diskriminant té kvadratické rovnice nesmí být kladný $D = 4\, \mathrm{cov}^2(x,y) - 4\, \sigma_x^2 \sigma_y^2 \leq 0$

$$\Rightarrow \mathrm{cov}^2(x,y) \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2 \quad \Rightarrow \quad \varrho^2(x,y) = \frac{\mathrm{cov}^2(x,y)}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \varrho(x,y) \leq 1$$