Řešení Test č. 1 středa 22. 11. 2023 15 bodů

Úloha 1. (6 bodů) Měříme elektrický proud procházející diodou a během našeho experimentu se proud postupně mění v rozsahu 1−30 mA. Bude přesnější měřit digitálním multimetrem Metex M-3860D se 4-místným displejem, rozsahem do 40 mA a výrobcem udanou přesností ±(0,8 % + 3 dgt), anebo bude lepší použít deprézský (analogový) miliampérmetr s třídou přesnosti 0,2 a rozsahem 0–75 mA?

2 b. - Vypočítejte standardní nejistotu měření proudu digitálním přístrojem. Odhadněte, kolik bitů má jeho A/D převodník.

2 b. - Vypočítejte standardní nejistotu měření proudu pro analogový miliampérmetr.

2 b. - Srovnejte oba přístroje: kdy bude který přístroj vhodnější (přesnější)?.

Řešení:

Na rozsahu 1–30 mA se chyba digitálního přístroje mění, u analogového je na celém rozsahu neměnná.

a) Digitální přístroj

Při minimální hodnotě 1 mA bude na displeji 4.000 mA, takže chyba bude:

$$\Delta_{\min} = 0.008 \cdot 1\ \mathrm{mA} + 3 \cdot 0.001\ \mathrm{mA} = 0.011\ \mathrm{mA},$$

Při maximálním proudu 30 mA bude na displeji 30.00 mA, tedy:

$$\Delta_{\max} = 0.008 \cdot 30\ \mathrm{mA} + 3 \cdot 0.01\ \mathrm{mA} = 0.27\ \mathrm{mA}.$$

Standardní nejistota digitálního přístroje bude mezi $\sigma_{\min} = \frac{\Delta_{\min}}{\sqrt{3}} \cong 0.006\ \mathrm{mA}$ a $\sigma_{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}} \cong 0.5\ \mathrm{mA}$.

Přístroj umí na displeji zobrazit hodnoty v desítkové soustavě 0000 až 4000 s krokem 3, potřebuje na to tedy mít alespoň $\frac{4000}{3} \sim 1333$ binů, na jejichž vyjádření ve dvojkové soustavě je nutné mít alespoň 11 bitů ($2^{11} = 2048$).

b) Analogový přístroj

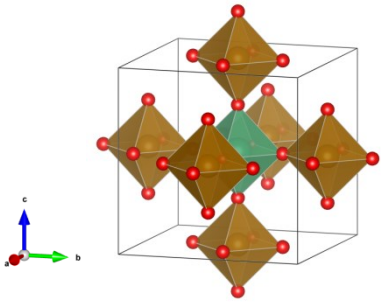
Na celém rozsahu je $\Delta = 0.002 \cdot 75\ \mathrm{mA} = 0.15\ \mathrm{mA}$, standardní nejistota tedy vyjde $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.09\ \mathrm{mA}$.

c) Digitální je přesnější, dokud nedosáhne $\Delta = 0.15\ \mathrm{mA}$ $(\sigma \cong 0.09\ \mathrm{mA})$, což nastane pro:

$(0.15\ \mathrm{mA} - 3 \cdot 0.01\ \mathrm{mA})/0.008 = 15\ \mathrm{mA}$

Na rozsahu od 1 do 15 mA je tedy vhodnější digitální přístroj, pro vyšší proudy už analogový.

Úloha 2. (5 bodů) V perovskitu $Ba(FeNb)_{0.5}O_3$ obsazují atomy železa i niobu stejný typ krystalových poloh (kyslíkový oktaedr) a obsazují je zcela náhodně se stejnou pravděpodobností. Každý takový oktaedr je v této struktuře obklopen šesti jinými oktaedry, které jsou co do symetrie zcela ekvivalentní (tj. jsou stejně daleko, stejně natočeny apod.) a které jsou opět obsazeny náhodně buď atomem Fe nebo Nb – viz schematické znázornění na obrázku (atomy baria a některé atomy Fe/Nb/O pro přehlednost nevykresleny).



2 b. - Spočítejte pro daný oktaedr uprostřed (na obrázku zelený, je jedno jestli v něm zrovna sedí Fe nebo Nb), kolik různých kombinací počtu sousedních Fe a Nb ve svém nejbližším okolí může mít. Které z těchto kombinací jsou nejčetnější?

3 b. - Aby se magnetické momenty Fe atomů se ve struktuře mohly spontánně uspořádat, musí mezi nimi působit silné výměnné interakce, což zde znamená, že spolu jejich oktaedry musí v krystalu přímo sousedit (tj. sdílejí spolu kyslíkový atom – na obrázku červený) a tvořit tak rozlehlou síť těchto interakcí. Nechť je daný oktaedr (např. ten zelený na obrázku) obsazen Fe, jaká je pravděpodobnost, že bude součástí takové sítě, tj. že bude mít aspoň dvě interakce s Fe

v okolních oktaedrech? A naopak, spočítejte pravděpodobnost, že ten Fe bude zcela izolovaný, tj. bez jediného atomu Fe v sousedních oktaedrech.

Řešení:

a) V šesti oktaedrech nejbližšího okolí se může nacházet $n_{\mathrm{Fe}} = 0$ až 6 atomů Fe (a tedy $6 - n_{\mathrm{Fe}}$ atomů Nb), různých kombinací jejich počtu je tedy 7. Je-li pravděpodobnost obsazení oktaedru stejná pro Fe i Nb, je $p = 0.5$, a pravděpodobnost jednotlivých poměrů z binomického rozdělení je:

$n_{\mathrm{Fe}} : n_{\mathrm{Nb}} = 0 : 6 \ldots B(6, 0, 0.5) = \binom{6}{0} 0.5^0 (1 - 0.5)^6 = 0.5^6$ a podobně pro ostatní kombinace,

obecně $B(6, n_{\mathrm{Fe}}, 0.5) = \binom{6}{n_{\mathrm{Fe}}} p^{n_{\mathrm{Fe}}} (1 - p)^{6 - n_{\mathrm{Fe}}} = \binom{6}{n_{\mathrm{Fe}}} p^6$.

Nejčetnější tedy bude kombinace s největším kombinačním číslem, což je $\binom{6}{3}$ pro poměr 3 : 3.

b) Máme-li oktaedr obsazený Fe, tak pravděpodobnost P_2, že bude součástí sítě interakcí, je dána (binomickou) pravděpodobností, že má z těch svých 6 sousedů alespoň 2 Fe, tedy:

$$P_2 = \sum_{k=2}^{6} B(n, k, p) = 1 - \sum_{k=0}^{1} B(n, k, p) = 1 - \binom{6}{0} p^0 (1 - p)^6 - \binom{6}{1} p^1 (1 - p)^5$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2^6} - \frac{6}{2^6} \cong 0.89$$

Podobně spočteme, že v okolí nebude ani jeden atom Fe:

$$P_0 = \binom{6}{0} p^0 (1 - p)^6 \cong 0.016$$

Úloha 3. (4 body) Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia (obsahující isotop 137Cs) naměřil během jedné hodiny 4 356 událostí – rozpadů ß-. Radionuklid 137Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

1+1 b. - Jaký je očekávaný počet událostí za sekundu? Jaká je standardní odchylka?

2 b. - Vypočítejte pravděpodobnost, že během jedné sekundy nedetekujeme ani jednu událost.

Řešení:

a) Aplikujeme Poissonovo rozdělení $P(k, \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$.

Detektor naměřil za jednu sekundu v průměru $\frac{4356}{3600} = 1.21$ událostí, střední hodnota a tedy i parametr Poissonova rozdělení $\mu = 1.21$. Standardní odchylka je odmocninou z disperze, která je rovna také parametru μ, takže standardní odchylka $\sigma = \sqrt{\mu} = 1.1$ událostí.

b) Dosadíme do poissonovské pravděpodobnosti počet událostí 0, tedy:

$$P(0, 1.44) = \frac{1.21^0 e^{-1.21}}{0!} \cong 0.298$$