Test č. 1 středa 20. 11. 2024 13:10 45 minut 15 bodů

Úloha 1. (6 bodů) Měříme elektrický proud procházející diodou a během našeho experimentu se proud postupně mění v rozsahu 1–30 mA. Bude přesnější měřit digitálním multimetrem Metex M-3860D se 4-místným displejem, rozsahem do 40 mA a výrobcem udanou přesností ±(0,8 % + 3 dgt), anebo bude lepší použít deprézský (analogový) miliampérmetr s třídou přesnosti 0,2 a rozsahem 0–75 mA?

(2 body) Vypočítejte standardní nejistotu měření proudu digitálním přístrojem. Odhadněte, kolik bitů má jeho A/D převodník.

(2 body) Vypočítejte standardní nejistotu měření proudu pro analogový miliampérmetr.

(2 body) Srovnejte oba přístroje: kdy bude který přístroj vhodnější (přesnější)?

Řešení:
Na rozsahu 1–30 mA se chyba digitálního přístroje mění, u analogového je na celém rozsahu neměnná.
a) Digitální přístroj
Při minimální hodnotě 1 mA bude na displeji 4.000 mA, takže chyba bude:

$$\Delta_{\text{min}} = 0.008 \cdot 1\ \text{mA} + 3 \cdot 0.001\ \text{mA} = 0.011\ \text{mA},$$

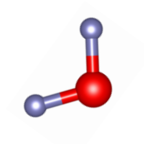
Při maximálním proudu 30 mA bude na displeji 30.00 mA, tedy:

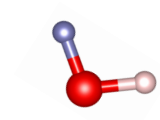
$$\Delta_{\text{max}} = 0.008 \cdot 30\ \text{mA} + 3 \cdot 0.01\ \text{mA} = 0.27\ \text{mA}.$$

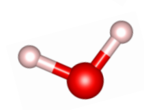
Standardní nejistota digitálního přístroje bude mezi $\sigma_{\text{min}} = \frac{\Delta_{\text{min}}}{\sqrt{3}} \cong 0.006\ \text{mA}$ a $\sigma_{\text{max}} = \frac{\Delta_{\text{max}}}{\sqrt{3}} \cong 0.16\ \text{mA}$.
Přístroj umí na displeji zobrazit hodnoty v desítkové soustavě 0000 až 4000 s krokem 3, potřebuje na to tedy mít alespoň $\frac{4000}{3} \sim 1333$ binů, na jejichž vyjádření ve dvojkové soustavě je nutné mít alespoň 11 bitů ($2^{11} = 2048$).

b) Analogový přístroj
Na celém rozsahu je $\Delta = 0.002 \cdot 75\ \text{mA} = 0.15\ \text{mA}$, standardní nejistota tedy vyjde $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.09\ \text{mA}$.
c) Digitální je přesnější, dokud nedosáhne $\Delta = 0.15\ \text{mA}$ $(\sigma \cong 0.09\ \text{mA})$, což nastane pro:
$(0.15\ \text{mA} - 3 \cdot 0.01\ \text{mA})/0.008 = 15\ \text{mA}$
Na rozsahu od 1 do 15 mA je tedy vhodnější digitální přístroj, pro vyšší proudy už analogový.

Úloha 2. (4 body) Smíchali jsme 0,45 molu normální vody H_2O s neznámým množstvím těžké vody D_2O. V takové směsi probíhá velmi rychlá chemická výměna, tzn. vodíkové atomy se rychle a libovolně vyměňují mezi molekulami. Důsledkem je, že se prakticky okamžitě ustanoví dynamická rovnováha mezi všemi třemi možnými isotopickými kombinacemi: H_2O, HDO, a D_2O. (Isotopický efekt je zanedbatelný, tj. je chemicky úplně jedno, zda je jádrem vodíku proton nebo deuteron – oba druhy isotopů se tedy vážou v molekule vody zcela náhodně a nezávisle.) Výslednou směs H_2O, HDO, a D_2O měříme jadernou magnetickou rezonancí na jádrech deuteria a ve spektru (^{2}H) detekujeme dva odlišné signály: jednu čáru příslušející HDO a druhou čáru příslušející D_2O, a tyto čáry mají poměr intenzit *Int*(HDO) : *Int*(D_2O) = 9. Intenzity jsou přímo úměrné počtu rezonujících jader, molekul HDO je tedy ve směsi 18x více než molekul D_2O.







(2 body) Spočítejte, jaké množství D_2O (v molech) bylo na začátku přimícháno do H_2O.

(2 body) Budeme-li měřit naopak signál normálního vodíku (^{1}H), naměříme také dvě čáry – jednu pro H_2O a jednu pro HDO. Jaký budou mít tyto čáry ve spektru poměr intenzit?

Řešení:

a) Pravděpodobnost, že vodík ^{1}H bude v molekule vody právě *k*-krát, vyjadřuje binomické rozdělení:

$$B(n,k,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Takže pravděpodobnost, že daná molekula je D_2O, tj. jádra vodíku jsou obě deuteria, je:

$B(2,0,p) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2.$

Podobně vyjádříme pravděpodobnost pro molekulu HDO:

$B(2,1,p) = \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p)$

a H_2O:

$B(2,2,p) = \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = p^2$.

Víme, že po ustálení isotopů poměr HDO a D_2O vyšel 18:1, tedy

$18 = \frac{2p(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{2p}{(1-p)}$, takže $p = \frac{9}{10}$

Parametr p má význam koncentrace jader ^{1}H (=proton), resp. $1-p$ udává koncentraci ^{2}H (D, deuteron), takže na začátku bylo přidáno $\frac{1}{9} \cdot 0.45 = 0.05$ mol těžké vody.

b) Pro $p = \frac{9}{10}$ stačí spočítat poměr pravděpodobností pro H_2O a HDO, tj. $\frac{p^2}{2p(1-p)} = \frac{p}{2(1-p)} = 4.5$, H_2O přispívá dvojnásobným signálem oproti HDO, takže poměr intenzit čar v ^{1}H spektru bude 9.

Úloha 3. (5 body) Studujeme optické signály, u kterých průměrně vzniká (a dopadá na náš detektor) $5 \cdot 10^5$ fotonů za sekundu. Signály jsou jednotlivé fotony, jsou tedy extrémně slabé, a proto k jejich detekci používáme fotonásobič v Geigerově režimu. V takovém nastavení je ale po detekci jedné události detektor po určitou krátkou dobu (tzv. mrtvá doba) neschopen detekovat žádnou jinou událost – pokud by tedy dopadl další foton na detektor dříve, než uplyne mrtvá doba, tak prostě není zaregistrován. Ten použitý detektor (i s celou související aparaturou) má mrtvou dobu 100 ns.

(2 body) Jaká je pravděpodobnost, že během mrtvé doby na detektor dopadne právě jeden foton?

(3 body) Stanovte účinnost detektoru, tj. spočtěte, jakou část z dopadajícího množství signálů detektor zvládne detekovat. (Pro jednoduchost uvažujte, že foton, který dopadne během mrtvé doby, už s detektorem neinteraguje, tj. nevyvolá další lavinu, a neprodlouží tím probíhající mrtvou dobu apod.)

Řešení:

a) Velké množství málo pravděpodobných a nezávislých událostí vede na použití Poissonova rozdělení:

$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Během mrtvé doby 100 ns na detektor v průměru dopadne $5 \cdot 10^5\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{1}{100\ \mathrm{ns}} = 0.05$ fotonů. Toto číslo je střední hodnota Poissonova rozdělení a ta je rovna parametru μ. Takže nyní snadno spočteme pravděpodobnost, že během mrtvé doby na detektor dopadne právě jeden foton:

$P(k=1, \mu=0.05) = \frac{0.05^1\, e^{-0.05}}{1!} \cong 0.048.$

b) Účinnost detektoru vyjádříme jako pravděpodobnost, že během mrtvé doby nedopadne ani jeden foton:

$$P(k = 0, \mu = 0.05) = \frac{0.05^0 \; e^{-0.05}}{0!} \cong 0.95$$

Účinnost detektoru je tedy 95 %.