Test č. 1 středa 20. 11. 2024 10:40 45 minut 15 bodů

Úloha 1. (6 bodů) Potřebujeme změřit elektrické napětí a máme k dispozici digitální voltmetr se čtyřmístným displejem a výrobcem udanou přesností (maximální chybou): ± (0.3 % + 1 dgt).

(2 body) Vypočítejte standardní nejistotu měření napětí, odečítáte-li na displeji hodnotu 12.34 V.

(2 body) Totéž spočtěte pro případ, že na tomto přístroji praskl displej a poslední číslici nelze přečíst (vypočítejte příslušnou zaokrouhlovací chybu, které se dopouštíte zanedbáním poslední číslice)

(2 body) Spočítejte, jestli ono nakonec místo rozbitého přístroje nebude lepší použít starý ručkový voltmetr s třídou přesnosti 0.5 a rozsahem 15 V.

Řešení:

a) Digitální přístroj má výrobcem udanou maximální chybu:

$$\Delta = 0.003 \cdot 12.34\ \mathrm{V} + 1 \cdot 0.01\ \mathrm{V} = 0.04702\ \mathrm{V},$$

standardní nejistota měření tedy bude:

$$\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \cong 0.027\ \mathrm{V}.$$

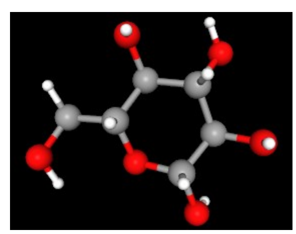
b) Nyní na displeji vidíme jen 12.3 V, přístroj tak naměřil něco mezi 12.3 a 12.4. Průměrnou nejistotu z toho, že neznáme poslední číslici, tak můžeme vyjádřit jako 0.05 V. Tuhle chybu přičteme k chybě z minulé části a můžeme psát, že U = 12.35 ± 0.08, přičemž jsme střední hodnotu umístili uprostřed možných hodnot.

c) Chybu ručkového přístroje spočítáme z rozsahu R a třídy přesnosti P jako:

$$\sigma_\mathrm{r} = \frac{RP}{100\sqrt{3}} = \frac{0.5 \cdot 15}{100\sqrt{3}} = 0.043\ \mathrm{V},$$

což je menší chyba 0.08 V, takže bude vhodnější ručkový přístroj než digitální s rozbitým displejem.

Úloha 2. (5 bodů) Molekula D-glukózy obsahuje 6 uhlíkových atomů (na obrázku šedé kuličky). Uhlík má dva stabilní isotopy, ^{12}C (98.93 %) a ^{13}C (1.07 %), které se v glukóze vyskytují zcela nahodile (tj. látka není isotopově obohacena apod.).
Spočítejte:



(2 body) pravděpodobnost, že v dané molekule nebude jádrem žádného uhlíkového atomu isotop ^{13}C.

(3 body) pravděpodobnost, že molekula bude obsahovat právě dvě ^{13}C jádra v atomech, které spolu navíc ještě sousedí (jejich atomy jsou spojeny C-C vazbou).

Řešení:

a) Jednotlivé isotopy jsou v atomech uhlíku rozmístěny zcela náhodně a nezávisle, použijeme tedy binomické rozdělení. V molekule je 6 uhlíkových pozic, pravděpodobnost „úspěchu" je 0.0107 a hledáme pravděpodobnost, že úspěch ani jednou nenastal, tj. $B(N{=}6, k{=}0, p{=}0.0107)$:

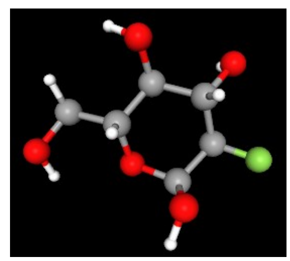
$$B(6, 0, 0.0107) = \binom{6}{0} 0.0107^0 (1 - 0.0107)^6 = 0.9893^6 \cong 0.9375.$$

b) Pravděpodobnost, že molekula obsahuje právě dva (k=2) atomy s jádrem ^{13}C, je dána:

$$B(6,2,0.0107) = \binom{6}{2} 0.0107^2 (1-0.0107)^4 = 15 \cdot 0.00011449 \cdot 0.9893^4 \cong 0.001645$$

Ty dva atomy s jádry ^{13}C mohou být v šesti pozicích rozmístěny $\binom{6}{2} = 15$ způsoby (díky nízké symetrii molekuly jsou všechny uhlíkové pozice chemicky neekvivalentní, tj. nemusíme uvažovat snížení tohoto počtu díky nějaké operaci symetrie). Atomy uhlíku v molekule tvoří nerozvětvený řetězec, takže snadno vidíme, že z těchto 15 způsobů je jen 5 takových, kdy ^{13}C uhlíky tvoří pár nejbližších sousedů. Takže z výše spočtené pravděpodobnosti bereme jen 5/15, tj.: $0.001645/3 \cong 0.00055$

Úloha 3. (4 body) Z D-glukózy se vyrábí důležité radiofarmakum (^{18}F)-fludeoxyglukóza nahrazením hydroxylové skupiny atomem fluoru s jádrem ^{18}F. Tento radioaktivní isotop má poločas rozpadu 110 minut a při jeho rozpadu vzniká pozitron, který se pak využívá v pozitronové emisní tomografii (PET): když ten pozitron anihiluje s elektronem, vzniknou dvě gama kvanta, která se najednou detekují. Protože PET měření probíhá koincidenčně (musí přiletět najednou obě kvanta), chceme, aby v časovém intervalu délky 4 ns v těle pacienta anihiloval pouze jeden jediný pár elektron-pozitron (a ne třeba několik párů). Pokud během 4 ns periody nastanou dvě nebo více událostí, přístroj je prostě zahodí. Do pacienta byla vpravena dávka tohoto radiofarmaka s aktivitou 200 MBq (tj. $2{\cdot}10^8$ rozpadů za sekundu).



(1 bod) Jaký je očekávaný počet událostí během časového okna 4 ns?

(1 bod) Jaká je standardní odchylka tohoto počtu?

(2 body) Vypočítejte pravděpodobnost, že během o 4ns okna nastane více než jedna událost.
Kolik procent anihilací je takto průměrně „zahozeno“?

Řešení:
a) Rozpadá-li se každou sekundu řádově stovky milionů jader ^{18}F, musí jich být přítomno velmi velké množství ($n \to \infty$). Zároveň je doba života dlouhá na to, aby šlo uvažovat, že pravděpodobnost, že se konkrétní jádro rozpadne v příštích 4 ns, byla velmi malá ($p \to 0$). A jednotlivé rozpady se vzájemně neovlivňují, situaci tedy můžeme dobře popsat Poissonovým rozdělením:

$$P(k,\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Během detekčního okna $4\ \mathrm{ns} = 4 \cdot 10^{-9}$ s v průměru anihiluje $2 \cdot 10^8\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 0.8$ párů pozitron-elektron. To je tedy střední počet událostí za to uvažované 4ns časové okno, této hodnotě se zároveň rovná parametr Poissonova rozdělení $\mu = 0.8$. Nejistota této hodnoty je dána standardní odchylkou $\sigma = \sqrt{V_k} = \sqrt{\mu} \cong 0.89$.

b) Pravděpodobnost, že během 4ns okna nastane více než jedna událost (dojde k přehlcení detekce) je:

$$P(k > 1, \mu = 0.8) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0.8^k\, e^{-0.8}}{k!}$$

Tuto pravděpodobnost nejsnáze spočítáme vyjádřením doplňkového jevu, $P(k \leq 1, \mu = 0.8)$:

$$P(k > 1, \mu = 0.8) = 1 - P(k \leq 1, \mu = 0.8) = 1 - \frac{0.8^0\ e^{-0.8}}{0!} - \frac{0.8^1\ e^{-0.8}}{1!} \cong 1 - 0.449 - 0.359 \cong 0.191$$

Během 4ns okna tedy dojde s pravděpodobností 0.191 k anihilaci dvou nebo více párů pozitron-elektron. Zhruba 19 % rozpadů je tedy v důsledku z měření vyřazeno.