Seminární úlohy 8

1. Opakovaným vážením vzorku jsme získali hodnoty v tabulce. Měření byla prováděna na vahách s chybou 0.05 mg. Zpracujte měření a uveďte výsledek se standardní chybou ($P \sim 0.6827$).

číslo měření	m_i (mg)	číslo měření	m_i (mg)
1	45.43	11	45.24
2	45.29	12	45.37
3	45.82	13	45.11
4	45.17	14	45.88
5	55.72	15	45.64
6	45.03	16	45.51
7	45.81	17	45.39
8	45.20	18	45.18
9	45.28	19	45.01
10	45.56	20	45.40

Řešení:

Nejprve spočítáme aritmetický průměr z hodnot m_i: $\overline{m} = \sum_{i=1}^{20} m_i = 45.902$ mg

Dále vypočítáme odchylky jednotlivých m_i od aritmetického průměru (sloupec 3) a kvadráty těchto odchylek (sloupec 4):

číslo měření	m_i (mg)	$m_i - \overline{m}$ (mg)	$(m_i - \overline{m})^2$ (mg)^2	$m_i - \overline{m}$ (mg)	$(m_i - \overline{m})^2$ (mg)^2
1	45.43	-0.472	0.222784	0.04	0.002
2	45.29	-0.612	0.374544	-0.10	0.0091
3	45.82	-0.082	0.006724	0.43	0.189
4	45.17	-0.732	0.535824	-0.22	0.0463
5	**55.72**	**9.818**	**96.39312**	-	-
6	45.03	-0.872	0.760384	-0.36	0.1262
7	45.81	-0.092	0.008464	0.42	0.1804
8	45.20	-0.702	0.492804	-0.19	0.0343
9	45.28	-0.622	0.386884	-0.11	0.0111
10	45.56	-0.342	0.116964	0.17	0.0305
11	45.24	-0.662	0.438244	-0.15	0.0211
12	45.37	-0.532	0.283024	-0.02	0.0002
13	45.11	-0.792	0.627264	-0.28	0.0758
14	45.88	-0.022	0.000484	0.49	0.2448
15	45.64	-0.262	0.068644	0.25	0.0649
16	45.51	-0.392	0.153664	0.12	0.0156
17	45.39	-0.512	0.262144	0.00	2E-05
18	45.18	-0.722	0.521284	-0.21	0.0421
19	45.01	-0.892	0.795664	-0.38	0.1408
20	45.40	-0.502	0.252004	0.01	0.0002
$\overline{m}$	45.902	s^2	5.405312	nové s^2	0.0686

Aplikujeme kritérium 3σ, tj. spočítáme koeficient studentova rozdělení pro $n-1=19$ stupňů volnosti hladinu pravděpodobnosti 3σ, $t_{19}^{3\sigma}=3.45$, a spočítáme standardní odchylku měření $s=\sqrt{\frac{1}{20-1}\sum_{i=1}^{20}(m_i-\overline{m})^2}=2.32493$ mg.
Vidíme, že měření č. 5 se do intervalu $(\overline{m}-t_{19}^{3\sigma}s,\ \overline{m}+t_{19}^{3\sigma}s)=(37.881, 53.923)$ mg nevejde, a vyloučíme tedy toto měření jako hrubou chybu.
Opakujeme výpočet aritmetického průměru $\overline{m}$ ze zbylých 19 měření (vyjde 45.39 mg), spočítáme příslušné odchylky měření od $\overline{m}$ a jejich kvadráty (sloupce 5 a 6).

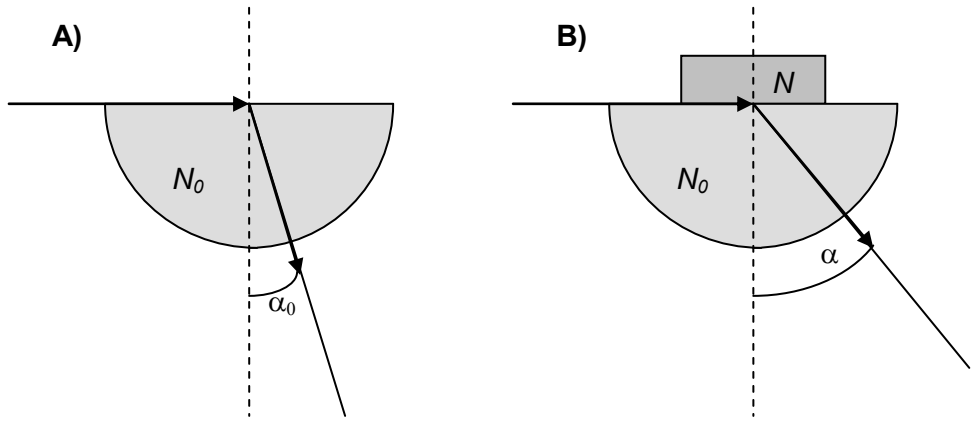
Spočítáme standardní odchylku aritmetického průměru, $s_{\overline{m}}=\frac{s}{\sqrt{n}}=\frac{0.26188}{\sqrt{19}}=0.0600797$ mg.
Uvážíme koeficient studentova rozdělení pro $n-1=18$ stupňů volnosti hladinu pravděpodobnosti 1σ, $t_{18}^{1\sigma}=1.03$ (a vidíme, že zde nehraje prakticky roli).
Vyjádříme celkovou kombinovanou nejistotu měření hmotnosti, tj. včetně chyby měřidla:

$$u_c^2=(t_{18}^{1\sigma}s_{\overline{m}})^2+0.05^2=0.003829395+0.0025$$

Výsledek 0.079557 zaokrouhlíme na jednu platnou číslici, 0.08 mg, a na stejný počet desetinných míst zaokrouhlíme i aritmetický průměr, výsledek je pak:

$$m=45.39(8)\ \text{mg}$$

2. Index lomu skla se měří pomocí Abbeova polokulového refraktometru užitím monochromatického světla sodíkové výbojky o vlnové délce λ = 589.6 nm. Princip měření je znázorněn na obrázku. Nejdříve se změří index lomu N_0 skleněné polokoule (obr. A) změřením maximálního úhlu lomu N_0 (tj. úhlu lomu paprsku s úhlem dopadu 90°). Následně se na polokouli umístí měřený vzorek, jehož index lomu N chceme zjistit a provede se opět měření maximálního úhlu lomu α (obr. B). Byly naměřeny následující hodnoty $\alpha_0 = 36°10'$ a $\alpha = 59°50'$. Chyba měření úhlu činila 10'. Určete index lomu N_0 polokoule a index lomu N měřeného vzorku pro použitou vlnovou délku. V obou případech vypočítejte absolutní a relativní chybu indexu lomu. Odhadněte, z jakého druhu skla byl vyroben měřený vzorek.



Řešení:

V uspořádání A) platí $1=N_0\sin\alpha_0$. Index lomu polokoule tedy vypočítáme jako $N_0=\frac{1}{\sin\alpha_0}$.

Po dosazení naměřené hodnoty úhlu α_0 dostáváme $N_0=1.6945$.

V uspořádání B) platí $N=N_0\sin\alpha$.

Opět dosadíme naměřené číselné hodnoty a dostaneme $N=1.4650$.

Chybu N_0 vypočítáme metodou přenosu chyb $\sigma_{N_0} = \left|\frac{dN_0}{d\alpha_0}\right|\sigma_{\alpha_0} = \left|\frac{\cos\alpha_0}{\sin^2\alpha_0}\right|\sigma_{\alpha_0}$. Po dosazení číselných hodnot dostaneme $\sigma_{N_0} = 0.0067$. Pozn. σ_{α_0} se musí vyjádřit v radiánech, tj. $\sigma_{\alpha_0} = 0.0029\,\mathrm{rad}$.
Podobně chybu indexu lomu měřeného vzorku dostaneme metodou přenosu chyb $\sigma_N^2 = \left(\frac{\partial N}{\partial N_0}\right)^2 \sigma_{N_0}^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 = \sin^2\alpha\ \sigma_{N_0}^2 + \left(N_0\cos\alpha\right)^2\sigma_\alpha^2$. Dosadíme číselné hodnoty a dostaneme $\sigma_N = 0.0063$.
Výsledek je tedy po zaokrouhlení chyb na jednu platnou číslici $N_0 = (1.695 \pm 0.007)$ a $N = (1.465 \pm 0.006)$. Relativní chyby jsou $\eta_{N0} = 0.4\ \%$ a $\eta_N = 0.4\ \%$. Vzorek je vyroben patrně ze skla SIMAX, které má index lomu $N = 1.472$ (pro $\lambda = 589.6$ nm).