

Seminární úlohy 6

1. Náhodné proměnné x a y jsou nezávislé s očekávanou hodnotou μ_x a μ_y , a rozptylem σ_x^2 a σ_y^2 . Vypočítejte očekávanou (střední) hodnotu veličiny $(x - y)^2$.

Řešení:

$$\begin{aligned}\langle (x - y)^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle - 2\langle xy \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 + \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 + \langle y \rangle^2 - 2(\text{Cov}(x, y) + \langle x \rangle \langle y \rangle) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \langle x \rangle^2 + \langle y \rangle^2 - 2\langle x \rangle \langle y \rangle = (\mu_x - \mu_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2\end{aligned}$$

2. Náhodná proměnná x má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$, náhodná proměnná y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, x)$. Vypočítejte korelaci náhodných proměnných x, y .

Řešení:

Nejprve je potřeba určit tvar funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x, y)$. Ačkoliv x i y jsou na svých intervalech rozděleny rovnoměrně, $f(x, y)$ není konstantní funkce, ale závisí na x . (Pro dané $x = x_0$ je proměnná y rozdělena rovnoměrně na intervalu $(0, x_0)$, takže hustota pravděpodobnosti bude $\frac{1}{x_0}$). Na celém oboru tak bude $f(x, y) = \frac{1}{x}$. Funkce je normovaná, jak ověříme spočtením

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{x} (x - 0) dx = \int_0^1 dx = 1$$

Pro výpočet korelace $\frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x \sigma_y}$ nyní potřebujeme znát všech pět příslušných středních hodnot $\langle xy \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, a $\langle y^2 \rangle$:

$$\langle xy \rangle = \int_0^1 \int_0^x xy \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{6}$$

$$\langle x \rangle = \int_0^1 \int_0^x x \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle y \rangle = \int_0^1 \int_0^x y \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{4}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^x x^2 \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\langle y^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^x y^2 \frac{1}{x} dy dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{9}$$

Dále spočítáme σ_x a σ_y jako

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{12}$$

Výsledný koeficient korelace je tak roven:

$$\rho(x, y) = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{11}{24}}{\sqrt{\frac{1}{12}} \sqrt{\frac{7}{12}}} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{7}{12}}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$