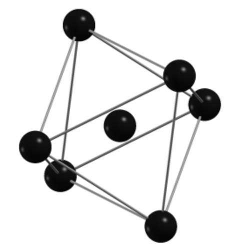
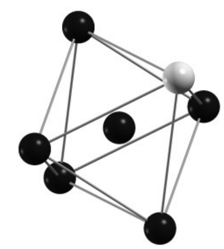
Seminární úlohy 5

1. Do krystalické látky tvořené atomy typu **X** byla přimíchána malá příměs ve formě atomů typu **Y**. Každý atom zkoumané látky má ve svém nejbližším okolí *n*=6 stejně vzdálených atomů a atomy typu **X** a **Y** obsazují polohy v krystalu zcela nahodile (nedochází tedy např. k nějakému shlukování). Experimentální metodou jaderné magnetické rezonance jsme dokázali rozlišit dva signály:

a) Jeden intenzivní signál (o intenzitě I_a), který odpovídá případům, kdy byl atom **X** obklopen 6 atomy typu **X** (černé atomy);
intenzita I_a je tedy přímo úměrná počtu situací na obrázku:



b) a jeden slabý signál (o intenzitě I_b) odpovídající případům, kdy je atom **X** obklopen 5 atomy typu **X** a jedním atomem příměsi **Y** (světle obarvený atom);
intenzita I_b je tak přímo úměrná počtu těchto situací na obrázku:



Poměr intenzity signálu v případech b) vůči intenzitě signálu případů a) je: I_b/I_a = 0,012.
Vypočítejte koncentraci c příměsi **Y** (koncentraci atomů **Y** v látce).

Řešení:
Pravděpodobnost, že nastane situace a) je dána binomickým rozdělením s parametry $N = 6$ (šest sousedních atomů), $k = 0$ (žádný atom ze šestice sousedů není příměs **Y**), a $p = ?$ (koncentrace, kterou chceme zjistit): $B(0{,}6, p) = \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6$
Intenzita I_a je úměrná četnosti situací a), a tedy úměrná i odpovídající pravděpodobnosti:

$$I_a = C.B(0{,}6, p) = C(1-p)^6$$

Analogicky získáme intenzitu I_b, která je úměrná (se stejnou konstantou úměrnosti *C*) pravděpodobnosti situací b), kdy je ze šesti sousedů právě jeden atom přímesi:

$$I_b = C.B(1{,}6, p) = C\binom{6}{1} p(1-p)^5 = 6Cp(1-p)^5$$

Známe poměr intenzit I_b/I_a = 0,012, takže:

$$0{,}012 = \frac{I_b}{I_a} = \frac{6Cp(1-p)^5}{C(1-p)^6} = \frac{6p}{1-p}$$

Koncentrace příměsi **Y** v látce $c = p \sim 0{,}002$.

2. Geigerův-Müllerův detektor umístěný v blízkosti radioaktivního vzorku cesia (obsahující isotop ^{137}Cs) naměřil během jedné hodiny 28 800 událostí – rozpadů ß$^-$. Vypočítejte pravděpodobnost p, že během jedné sekundy detekuje **právě šest** událostí. Radionuklid ^{137}Cs má dlouhý poločas rozpadu (cca 30 let) a vzorek obsahuje obrovské množství těchto radioaktivních jader.

Řešení:

Vzorek obsahuje vysoký počet jader ($N \rightarrow \infty$) a zároveň pravděpodobnost, že se konkrétní jádro ^{137}Cs s poločasem rozpadu $t_{1/2} \sim 30$ let v příští sekundě rozpadne, je velmi malá: $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \sim 7{,}3.\,10^{-10}$.

Zároveň jsou jednotlivé události (rozpady) navzájem nezávislé. Jsme tedy oprvávněni k popisu použít Poissonovo rozdělení.

Z počtu 28 800 rozpadů naměřených během jedné hodiny lze určit střední hodnotu počtu rozpadů za sekundu jako 8, a tedy parametr Poissonova rozdělení μ je roven 8. Pravděpodobnost, že dojde k 6 rozpadům za sekundu je potom:

$$P(6,8) = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} = 0{,}1221$$