Seminární úlohy 3

1. Hustota pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení je exponenciálně klesající funkce. Parametrem rozdělení je střední doba života τ.
Napište hustotu pravděpodobnosti exponenciálního rozdělení.
Vypočítejte distribuční funkci exponenciálního rozdělení.
V programu Gnuplot nakrestele grafy obou funkcí.

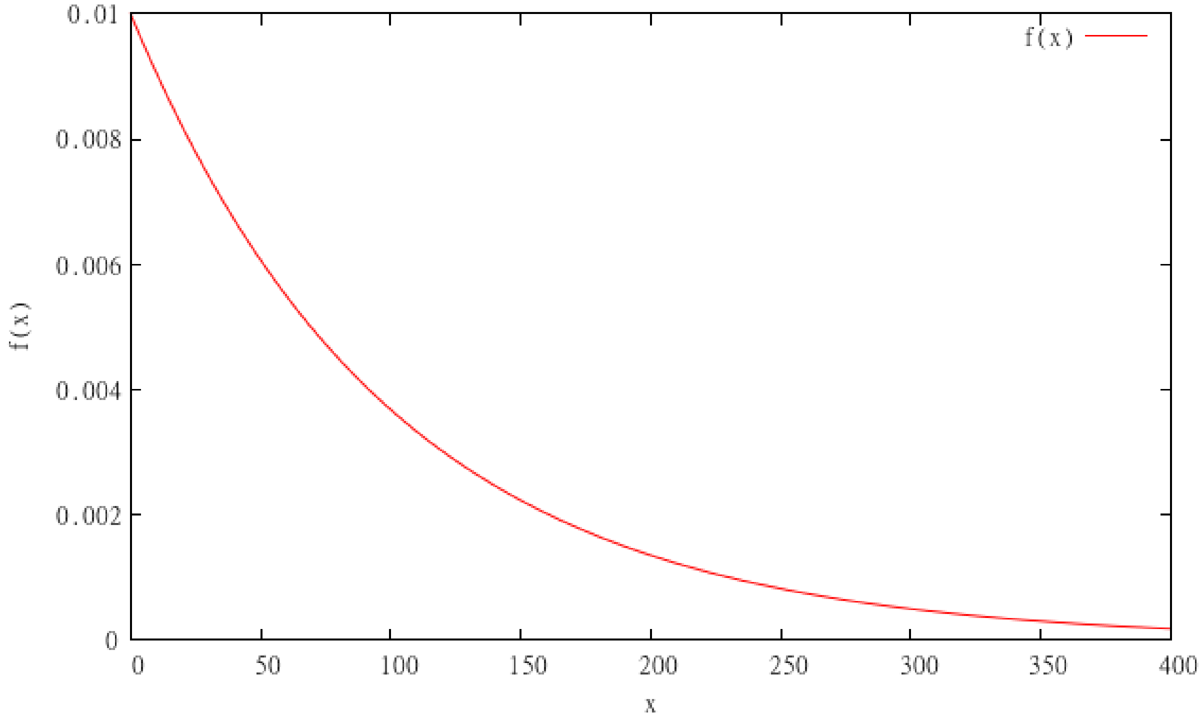
Řešení:

Doba života nemůže být záporná, proto $f(x) = 0$ pro $x < 0$.
Pro kladné hodnoty x pravděpodobnost výskytu náhodné proměnné v okolí bodu x exponenciálně klesá s rostoucím x. Tedy $f(x) = Ke^{-\frac{x}{\tau}}$ pro $x \geq 0$, kde K je konstanta, kterou zjistíme z normalizační podmínky $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Tento integrál můžeme rozdělit na dvě části $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$.
První část je nulová $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$.
Druhá část $\int_{0}^{\infty} f(x)dx = K\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\tau}}dx = K\left[-\tau e^{-\frac{x}{\tau}}\right]_0^{\infty} = K\tau = 1$.
Z toho dostáváme, že konstanta K musí být $K = \frac{1}{\tau}$

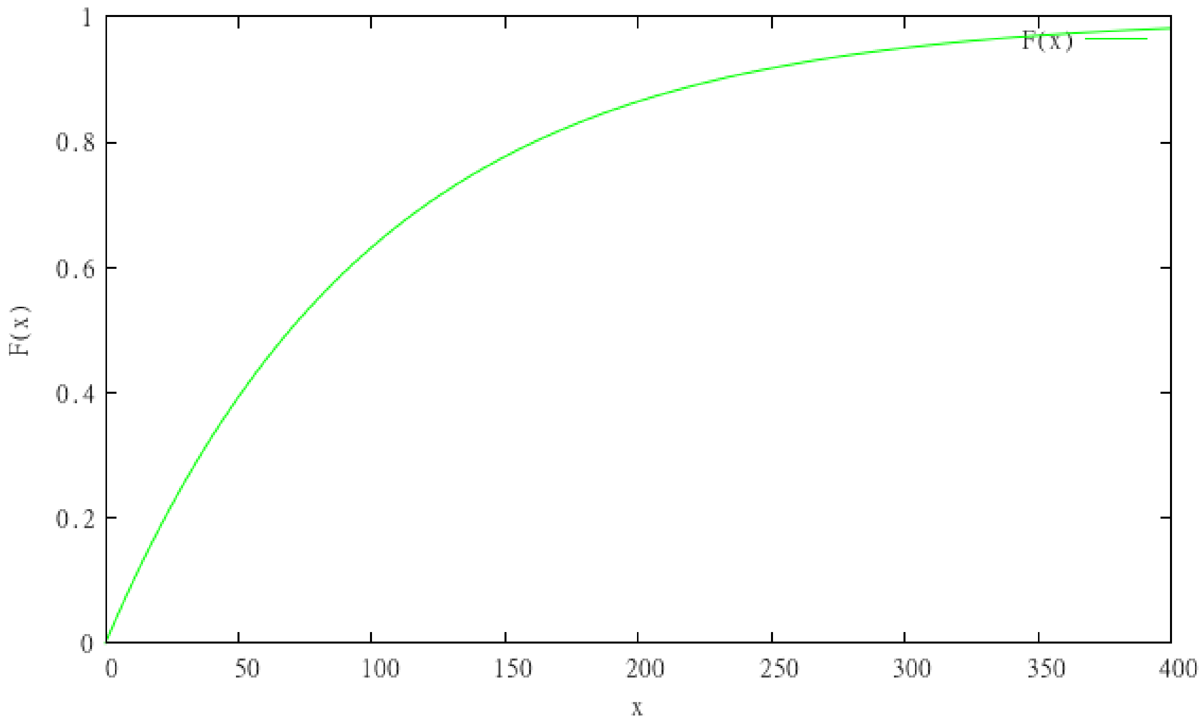
Tedy hustota pravděpodobnosti je $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$

Distribuční je definovaná jako $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
Pro $x < 0$ je to $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt = 0$.
Pro $x \geq 0$ je to $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\, dt = 0 + \left[-e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{x} = 1 - e^{-\frac{x}{\tau}}$
Tedy distribuční funkce exponenciálního rozdělení je $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\tau}} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$

hustota pravděpodobnosti



distribuční funkce



2. Dokažte následující často používané vlastnosti pravděpodobnosti

1. $P(\{0\}) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, kde $\overline{A}$ je doplnek množiny A
3. $0 \le P(A) \le 1$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Řešení:

Použijeme definiční axiomy pravděpodobnosti
(i) $P(\Omega) = 1$
(ii) $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \ge 0$
(iii) $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ad 1) $\Omega = \Omega \cup \{0\}$. Prázdná množina je disjuktní s každou monožinou tedy i Ω.
Podle (iii) můžeme psát $P(\Omega) = P(\Omega \cup \{0\}) = P(\Omega) + P(\{0\})$. Podle (i) je $P(\Omega) = 1$ a tedy musí být i $P(\Omega) + P(\{0\}) = 1$. Z toho dostáváme, že $P(\{0\}) = 0$.

ad 2) $\Omega = A \cup \overline{A}$ a A, $\overline{A}$ jsou disjunktní množiny. Proto podle (iii) $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$.
Platí tedy $P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$. Odtud dostáváme $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ad 3) Nerovnost $P(A) \ge 0$ platí podle (ii). Zbývá tedy dokázat, že $P(A) \le 1$. To provedeme sporem
Nechť B je takový jev pro který je $P(B) > 1$. Platí $B \cup \overline{B} = \Omega$ a B, $\overline{B}$ jsou disjunktní jevy. Proto podle (iii) $P(B) + P(\overline{B}) = P(\Omega) = 1$. Jelikož současně platí, že $P(B) > 1$, musí být $P(\overline{B}) < 0$. To je ale spor s axiomem (ii).

ad 4) Označme jako $B \setminus A$ doplněk množiny *B* v množině *A*, tj. $B \setminus A$ množina všech prvků, které patří do *A* ale nepatří do *B*. Protože $A \subset B$ je množinu *B* je možné psát jako sjednocení dvou disjuktních množin A a $B \setminus A$, tj. $B = A \cup B \setminus A$. Platí tedy $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Protože $P(B \setminus A) \ge 0$, musí být $P(B) \ge P(A)$.

ad 5) Množinu *B* lze psát jako sjednocení dvou disjunktních množin $B = (A \cap B) \cup B \setminus A$.
Podobně $A = (A \cap B) \cup A \setminus B$. Pro pravděpodobnosti tedy podle (iii) platí

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B) \qquad \text{(a1)}$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A). \qquad \text{(a2)}$$

Množinu $A \cup B$ je možné vyjádřit jako sjednocení tří disjunktních množin
$A \cup B = (A \cap B) \cup B \setminus A \cup A \setminus B$ a tedy pro praděpodobnost platí podle (iii)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) + P(A \setminus B) \qquad \text{(a3)}$$

Pravděpodobnosti $P(A \setminus B)$ a $P(B \setminus A)$ si vyjádříme z (a1) a (a2) a dosadíme do (a3)

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$