

Princip maximální věrohodnosti

- **Věrohodnostní funkce** náhodné veličiny:

Funkce je úměrná

pravděpodobnosti realizované hodnoty (pro diskrétní veličiny)

hustotě pravděpodobnosti (spojité veličiny).

- Parametry rozdělení/hustoty pravděpodobnosti **neznáme**, ale předpokládáme, že tato věrohodnostní funkce je na nich závislá.

- **Hledáme** takové hodnoty parametrů rozdělení, ze kterých nejpravděpodobněji vyplývají realizované hodnoty, tj. pro které je hodnota věrohodnostní funkce **největší**.

Princip max. věrohodnosti - odhad parametrů

- Příklad:

Odhad parametru **binomického rozdělení** z jediného experimentu.

Hledáme tedy odhad (estimátor) pro pravděpodobnost realizace p
- známe počet realizací k při N pokusech

$$B_{N,k}(p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{věrohodnostní funkce})$$

Hledáme hodnotu $p = \tilde{p}$, pro niž je pravděpodobnost $B_{N,k}$ **maximální**.

$$\frac{dB_{N,k}(p)}{dp} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{k}{N} \quad \rightarrow \quad \langle \tilde{p} \rangle = \frac{\langle k \rangle}{N} = p$$

střední hodnota odhadu = střední hodnotě veličiny $\rightarrow$ **nevychýlený** odhad
(nepředpojatý, nestranný,
unbiased estimate)

Princip max. věrohodnosti - odhad parametrů

Odhad parametru **binomického rozdělení** z jediného experimentu.

- střední hodnota odhadu p : $\tilde{p} = \frac{k}{N} \rightarrow \langle \tilde{p} \rangle = \frac{\langle k \rangle}{N} = p$
- disperze odhadu p : $V(\tilde{p}) = \frac{1}{N^2} V(k)$

Pro posouzení kvality (přesnosti) odhadů zkoumáme jejich střední hodnoty:

- odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = N \langle \tilde{p} \rangle = Np = \mu$ nevychýlený odhad
- odhad disperze: $\langle \tilde{V}(k) \rangle = \frac{N-1}{N} V(k)$ vychýlený odhad

nevychýlený odhad disperze: $\tilde{V}^*(k) = \frac{N}{N-1} \tilde{V}(k) = V(k)$

Opakování nezávislého experimentu

Odhad parametru **binomického rozdělení**

z n -krát nezávisle opakovaného experimentu.

Výsledkem opakovaného experimentu jsou hodnoty $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Pravděpodobnost takového výsledku: $P_{k_1, k_2, \dots, k_n}(p) = \prod_{i=1}^n B_{k_i}(p)$

Opět z podmínky $\frac{dP_{k_1, k_2, \dots, k_n}(p)}{dp} = 0$

získáme odhad p : $\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{N}$ srovn.: $\tilde{p} = \frac{k}{N}$ (pro 1 experiment)

Takový odhad je aritmetickým průměrem odhadů získaných z jediného experimentu.

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle k_i \rangle}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Np}{N} = p \quad \text{nevychýlený odhad}$$

Opakování nezávislého experimentu

Binomické rozdělení:

$$\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{N}$$

• odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = N \langle \tilde{p} \rangle = Np$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\langle \tilde{V}(k) \rangle = N \langle \tilde{p}(1 - \tilde{p}) \rangle = \frac{nN-1}{nN} V(k)$ vychýlený odhad

podobně pro **Poissonovo rozdělení:** $\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$

• odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ nevychýlený odhad

• odhad disperze: $\langle \tilde{V}(k) \rangle = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ nevychýlený odhad

Odhad parametrů normálního rozdělení

Normální rozdělení: $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

n -krát opakujeme.

Věrohodnostní funkce: $P_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \mu, \sigma)$

Řešením podmínek $\frac{dP_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma)}{d\mu} = 0$ $\frac{dP_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma)}{d\sigma} = 0$

získáme odhady parametrů μ a σ :

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

Lze opět spočítat odhad střední hodnoty a disperze.

Odhad parametrů normálního rozdělení

- odhad střední hodnoty: $\langle \tilde{\mu} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle = \bar{x} = \mu$ nevychýlený odhad
- odhad disperze: $\langle \tilde{V} \rangle = \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle = \frac{n-1}{n} V(x)$ vychýlený odhad

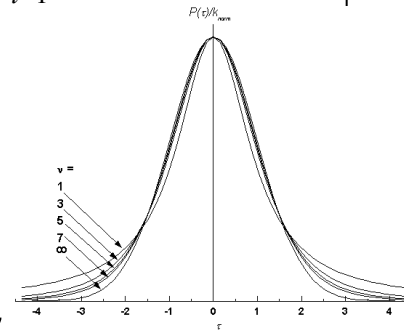
→ nevychýlený odhad disperze: $\tilde{V}^* = \frac{n}{n-1} \tilde{V} = V, \quad S_x^2 \equiv \tilde{V}^*$

Výsledek měření veličiny x s normálním rozdělením bychom tedy mohli zapsat jako:

$$x = \tilde{\mu} \pm \tilde{\sigma}^* = \bar{x} \pm S_x \quad \text{kde } S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- interpretujeme: x leží s pravděpodobností P v intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

$$P = \int_{\mu_x - S_x}^{\mu_x + S_x} N(\mu_x, \sigma_x) dx$$



? jak ale získat P , když neznáme μ, σ ? známe pouze odhady: $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$

tj. jak kompenzovat konečný počet měření? → Studentovo t-rozdělení

Odhad parametrů normálního rozdělení

- Studentovo t-rozdělení:

- Náhodná veličina u má rozdělení $N(0,1)$.
- Náhodná veličina v má rozdělení $\chi^2(n)$, normované počtem stupňů volnosti $(n-1)$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

- Konstrukce u a v :

$$u \equiv \frac{x - \mu_x}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}} \qquad v \equiv \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (n-1) \frac{S_x^2}{\sigma_x^2}$$

→ veličina u má rozdělení $N(0,1)$

→ veličina v má rozdělení χ^2 s $n-1$ stupni volnosti

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{n-1}}} = \frac{x - \mu_x}{S_x} \sqrt{n}$$

$$P = \int_{-t_P}^{t_P} f(t) dt$$

→ veličina t má studentovo t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti

Hodnoty t_P pro různé pravděpodobnosti P a pro různé počty stupňů volnosti ($n-1$):

- Výsledek n -krát opakovaného měření veličiny x :

$$x = \bar{x} \pm t_P \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- S rostoucím počtem stupňů volnosti ($n-1$), tj. s rostoucím počtem opakování měření (n), se t_P blíží hodnotám pro normální rozdělení. (Důsledek CLV.)
- Zejména pro malé hodnoty n a vysokou P je korekce výrazná.
 - tj. máme-li **malý počet měření**, musíme pro dosažení stejně velké pravděpodobnosti P volit **širší** interval výskytu okolo x .

Stupeň volnosti ($n-1$)	Pravděpodobnost (P)					
	0.6827	0.9	0.95	0.9545	0.99	0.9973
	σ			2σ		3σ
1	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
2	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
3	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
4	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
6	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
7	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
8	1.07	1.83	2.31	2.37	3.36	4.28
9	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
11	1.05	1.80	2.20	2.25	3.11	3.85
12	1.04	1.78	2.18	2.23	3.05	3.76
13	1.04	1.77	2.16	2.21	3.01	3.69
14	1.04	1.76	2.14	2.20	2.98	3.64
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
16	1.03	1.75	2.12	2.17	2.92	3.54
17	1.03	1.74	2.11	2.16	2.90	3.51
18	1.03	1.73	2.10	2.15	2.88	3.48
19	1.03	1.73	2.09	2.14	2.86	3.45
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
25	1.02	1.71	2.06	2.11	2.79	3.33
30	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
35	1.01	1.70	2.03	2.07	2.72	3.23
40	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
45	1.01	1.68	2.01	2.06	2.69	3.18
50	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
100	1.005	1.660	1.984	2.025	2.626	3.077
∞	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000