Pravděpodobnost - Kolmogorovy axiomy

Nechť Ω je prostor jevů pro daný experiment. Potom **pravděpodobnost P** je každé zobrazení množiny všech podmnožin množiny Ω do množiny reálných čísel, které splňuje následující podmínky:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$
3. $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Některé vlastnosti pravděpodobnosti:

(i) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$

(ii) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$, kde $\overline{\mathrm{A}}$ je doplnek množiny A

(iii) $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$

(iv) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{B})$

(v) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Pravděpodobnost – klasická definice pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti – limita relativních četností jevu A

- opakujeme N – krát experiment
- N_A – počet výsledků, kdy nastal jev A
- **relativní četnost** jevu A : $X_A = \dfrac{N_A}{N}$

pravděpodobnost jevu A: $\mathrm{P}(A) = \lim_{N \to \infty} X_A$

- je nutné mít možnost experiment mnohokrát opakovat

Pravděpodobnost: Bayesovský přístup

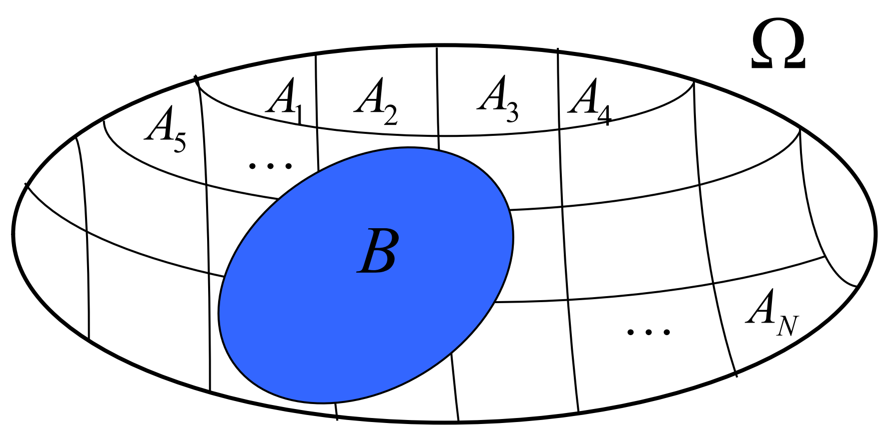
pravděpodobnost – stupeň víry v platnost dané hypotézy

- subjektivní - závisí na pozorovateli
- podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zákon celkové pravděpodobnosti

- úplný systém disjunktních podmnožin $\{A_i\}$



$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \Omega$$

$$A_i \cap A_j = 0 \quad i \neq j$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{N} (B \cap A_i) = 0$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$$

- Bayesův teorém

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Podmíněná pravděpodobnost: Bayesův teorém

Bayesův teorém

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(Teorie\,|\,Data) = \frac{P(Data\,|\,Teorie)P(Teorie)}{P(Data)}$$

posteriorní pravděpodobnost

věrohodnost

apriorní pravděpodobnost

Thomas Bayes
1702 – 1761

"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"
Reverend Thomas Bayes *(Philosophical Transactions of the Royal Society, Volume 53, pages 370-418, 1763)*

Podmíněná pravděpodobnost: příklad – Máte děťátko?

index selhání

10 žen za 1 rok ze 100 žen

$\Rightarrow P(T \text{ za 1 rok}) = 0.1$

$\Rightarrow P(T \text{ za 1 měsíc}) = 0.1/12 \cong 0.008$

prostor jevů: $\Omega = \{(t,+)\ (t,-)\ (n,+)\ (n,-)\}$

T = {(t,+) (t,-)} – je těhotná $\qquad P(T) = 0.008$

N = {(n,+) (n,-)} – není těhotná $\qquad P(N) = 0.992$

R_+ = {(t,+) (n,+)} – test říká ano $\qquad P(R_+ \mid T)$

R_- = {(t,-) (n,-)} – test říká ne

$$P(T \mid R_+) = \frac{P(R_+ \mid T)P(T)}{P(R_+ \mid T)P(T) + P(R_+ \mid N)P(N)}$$

Podmíněná pravděpodobnost: příklad – Máte děťátko?

Instant-View® Pregnancy Urine Test

Method	Lateral flow test
Detection level	25 mIU/ml
Accuracy	> 99%
Sample	Urine
Read time	2-5 minutes
Storage	Room temperature
Shelf life	24 months from date of manufacture
CLIA Classification	Waived

NEW Early Detection Ultra Pregnancy test strip Pack.

- **Convenient: Mailed to your Home.**
- **Cost: Lowest Internet price guarantee**
- **Easy: One Step System.**
- **Early: Detects 10 mIU/ml of hCG.**
- **Can work up to 3 days earlier than standard tests.)**
- **Fast: Reliable results in three minutes.**
- **Accurate: Greater than 99% accuracy, sensitivity and specificity in clinical trials.**
- **European: Includes multi-lingual Instructions.**
- **Delivery: Same day dispatch 1st Class UK delivery.**
- **Insert the number of packs you wish to purchase in the box**
- **next to the selected item and "add to Basket"**

Podmíněná pravděpodobnost: příklad – Máte děťátko?

prostor jevů: $\Omega = \{(t,+)\ (t,-)\ (n,+)\ (n,-)\}$

index selhání

10 žen za 1 rok ze 100 žen

$$\Rightarrow P(T \text{ za 1 rok}) = 0.1$$

$$\Rightarrow P(T \text{ za 1 měsíc}) = 0.1/12 \cong 0.008$$

T = {(t,+) (t,-)} – je těhotná $\quad P(T) = 0.008$

N = {(n,+) (n,-)} – není těhotná $\quad P(N) = 0.992$

R_+ = {(t,+) (n,+)} – test říká ano $\quad P(R_+ \mid T) = 0.995$

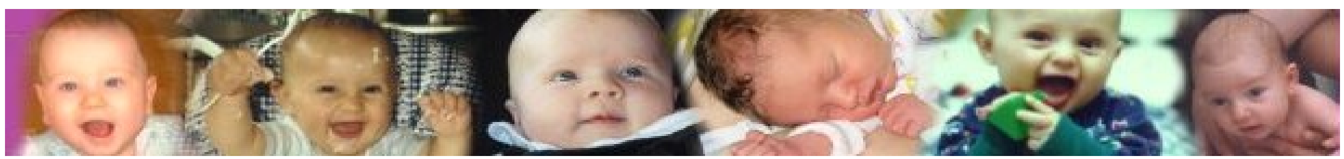
R_- = {(t,-) (n,-)} – test říká ne $\quad P(R_+ \mid N) = 0.01$

$$P(R_+ \mid N) = 0.001$$

$$P(T \mid R_+) = 0.89$$

$$P(T \mid R_+) = \frac{P(R_+ \mid T)P(T)}{P(R_+ \mid T)P(T) + P(R_+ \mid N)P(N)}$$

$$P(T \mid R_+) = 0.45$$



Podmíněná pravděpodobnost: příklad – Spam filter

bogofilter

$$P(\text{spam}|\text{word}) = \frac{P(\text{word}|\text{spam})P(\text{spam})}{P(\text{word})} = \frac{P(\text{word}|\text{spam})P(\text{spam})}{P(\text{word}|\text{spam})P(\text{spam}) + P(\text{word}|\text{nespam})P(\text{nespam})}$$

$$P\left(\text{spam}\left|\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i\right.\right) = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{spam}\right)P(\text{spam})}{P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{spam}\right)P(\text{spam}) + P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{nespam}\right)P(\text{nespam})} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{spam}\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{spam}\right) + P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_i \middle| \text{nespam}\right)}$$

1. učení: stanovení pravděpodobností $P(\text{w}_\text{i}|\text{spam})$ $P(\text{w}_\text{i}|\text{nespam})$

2. filtrování

$$P(\text{spam}) = P(\text{nespam})$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{N} \text{w}_\text{i} \middle| \text{spam}\right) = \prod_{i=1}^{N} P(\text{w}_\text{i}|\text{spam})$$

$P(\text{Nigeria}|\text{spam}) = 0.90$ $P(\text{Nigeria}|\text{nespam}) = 0.01$

$P(\text{love}|\text{spam}) = 0.60$ $P(\text{love}|\text{nespam}) = 0.40$

$P(\text{discount}|\text{spam}) = 0.85$ $P(\text{discount}|\text{nespam}) = 0.10$

$P(\text{physics}|\text{spam}) = 0.10$ $P(\text{physics}|\text{nespam}) = 0.80$

$$P(\text{spam}) = P(\text{nespam}) = 0.50$$

- <u>Email 1</u>: Nigeria, discount

$$P(\text{spam}|\text{Nigeria} + \text{discount}) = 0.999$$

- <u>Email 2</u>: Nigeria, physics

$$P(\text{spam}|\text{Nigeria} + \text{physics}) = 0.918$$

- <u>Email 3</u>: love, physics

$$P(\text{spam}|\text{love} + \text{physics}) = 0.158$$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

- spojitá náhodná proměnná x, hustota pravděpodobnosti $f(x)$
- naměřená data D_N

$$f(x|D_N) = \frac{P(D_N|x)\,f(x)}{P(D_N)}$$

apriorní hustota pravděpodobnosti

posteriorní hustota pravděpodobnosti

věrohodnost

- zákon celkové pravděpodobnosti

$$P(D_N) = \int_{-\infty}^{\infty} P(D_N|x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

Příklad – je mince fair?

p – pravděpodobnost, že při jednom hodu padne orel

N – opakování, k – krát padnul orel

$$f(p|o_k) = \frac{P(o_k|p)f(p)}{P(o_k)} \longrightarrow f(p|o_k) = (N+1)\frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}$$

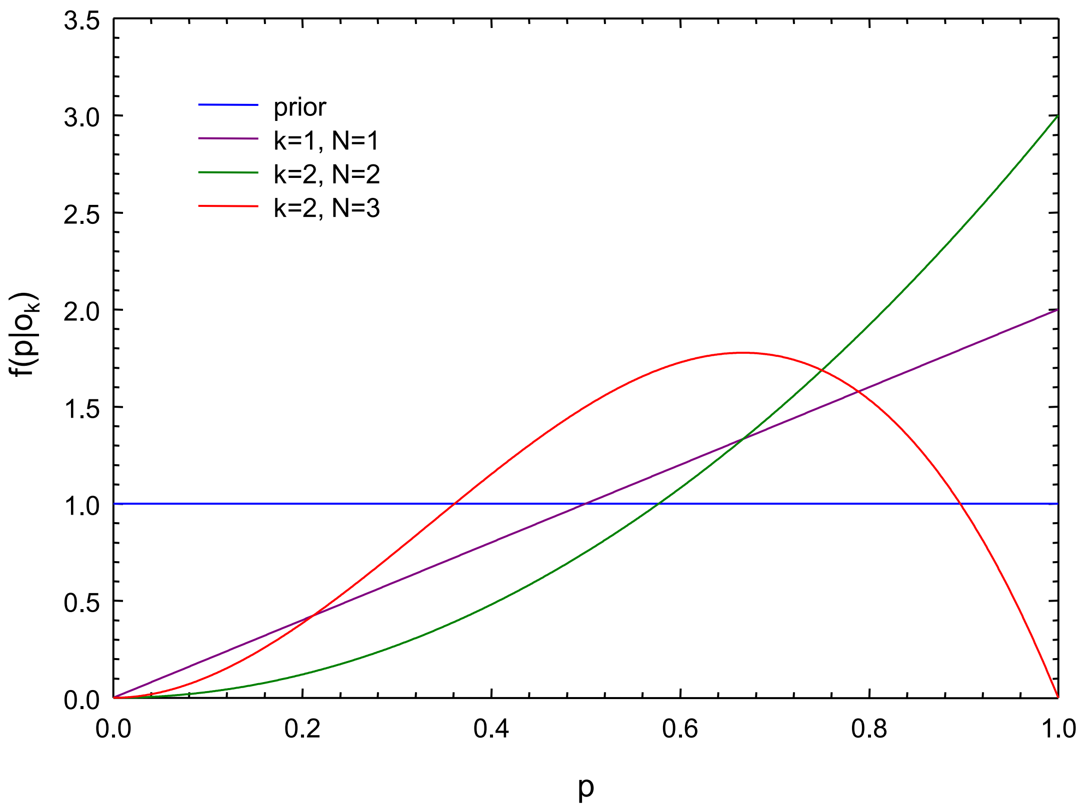
věrohodnost: $P(o_k|p) = \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}$ (binomické rozdělení)

zákon celkové pravděpodobnosti: $P(o_k) = \int_0^1 P(o_k|p)f(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 \frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}\mathrm{d}p$

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{N-k}\mathrm{d}p = \frac{k!(N-k)!}{N!}\frac{1}{N+1}$$

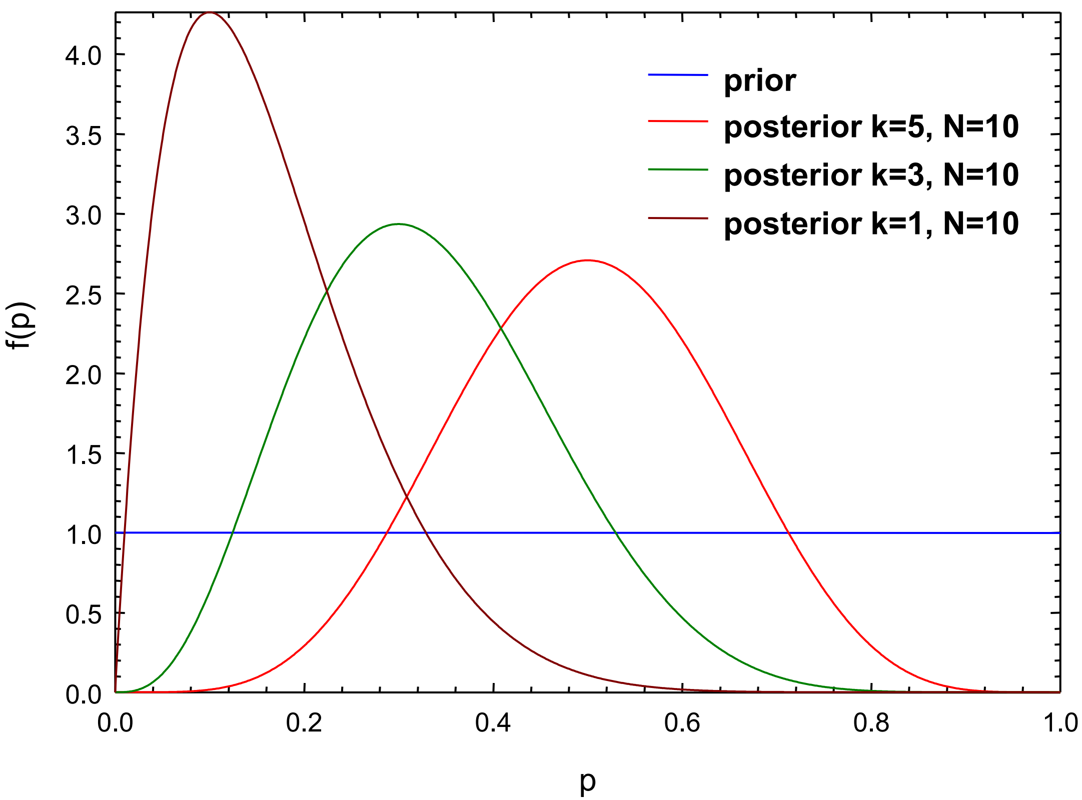
Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

$$f\left(p|o_k\right)=\left(N+1\right)\frac{N!}{k!\left(N-k\right)!}p^k\left(1-p\right)^{N-k}$$



Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

$$f\left(p|o_k\right)=\left(N+1\right)\frac{N!}{k!\left(N-k\right)!}\,p^k\left(1-p\right)^{N-k}$$



- maximum $f\left(p|o_k\right)$

$$p_{\mathrm{mod}}=\frac{k}{N}\qquad\text{(modus)}$$

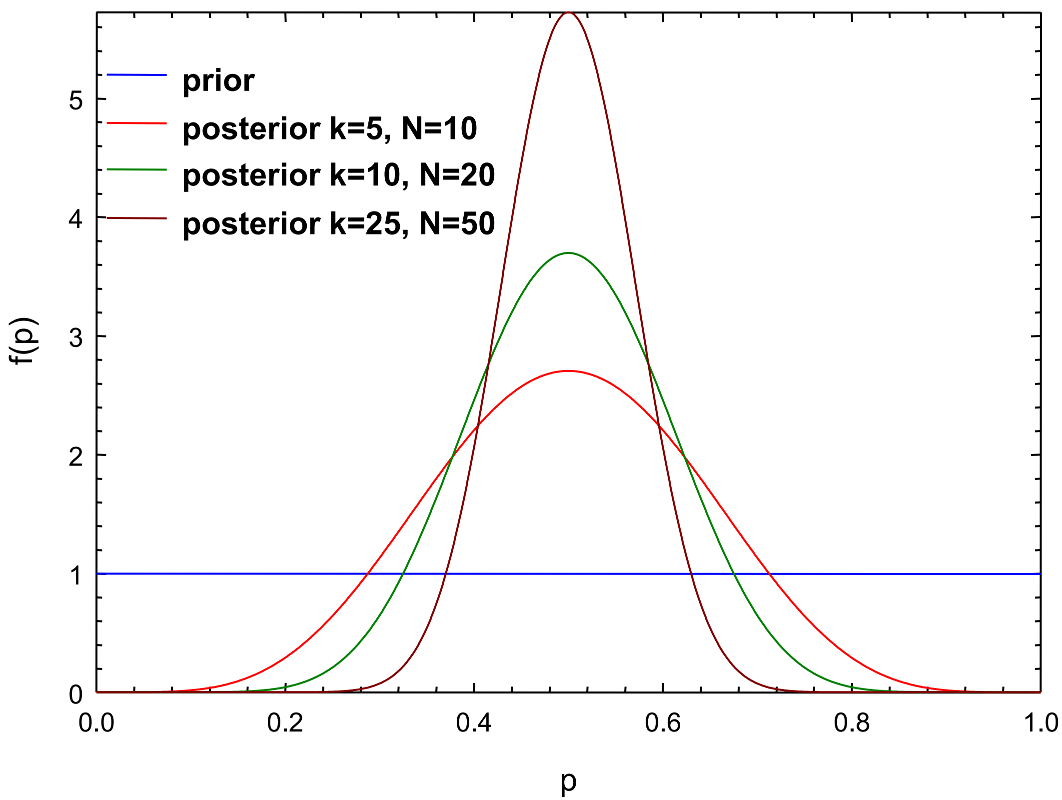
- očekávaná hodnota

$$E\left[p\right]=\int_0^1 p\,f\left(p|o_k\right)\mathrm{d}p$$

$$E\left[p\right]=\frac{k+1}{N+2}$$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

$$f(p|o_k) = (N+1)\frac{N!}{k!(N-k)!}p^k(1-p)^{N-k}$$



- maximum $f(p|o_k)$

$$p_{\mathrm{mod}} = \frac{k}{N} \qquad \text{(modus)}$$

- očekávaná hodnota

$$E[p] = \int_0^1 p\, f(p|o_k)\,\mathrm{d}p$$

$$E[p] = \frac{k+1}{N+2}$$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

Neurčitost odhadu *p*

$$f\left(p|o_k\right)=\left(N+1\right)\frac{N!}{k!\left(N-k\right)!}\,p^k\left(1-p\right)^{N-k}$$

p – pravděpodobnost, že při jednom hodu padne orel:

p_0 – poloha maxima posteriorní pravděpodobnosti: $\rightarrow$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,f\left(p|o_k\right)}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=0$

logaritmus posteriorní pravděpodobnosti: $\ell=\ln\left(f\left(p|o_k\right)\right)$

Taylorův rozvoj v p_0: $\ell\approx\ell\left(p_0\right)+\dfrac{1}{2}\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p=p_0}\left(p-p_0\right)^2$

Aproximace posteriorní pdf v okolí maxima: $f\left(p|o_k\right)=A\exp\left(\dfrac{1}{2}\left.\dfrac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p=p_0}\left(p-p_0\right)^2\right)$

Gaussián: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(p-p_0\right)^2}{\sigma^2}\right)$

Aproximace neurčitosti odhadu p: $\sigma\approx\left(-\dfrac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

Neurčitost odhadu *p*

$$f\left(p|o_k\right)=\left(N+1\right)\frac{N!}{k!\left(N-k\right)!}p^k\left(1-p\right)^{N-k}$$

p – pravděpodobnost, že při jednom hodu padne orel:

Aproximace neurčitosti odhadu *p*: $\sigma \approx \left(-\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

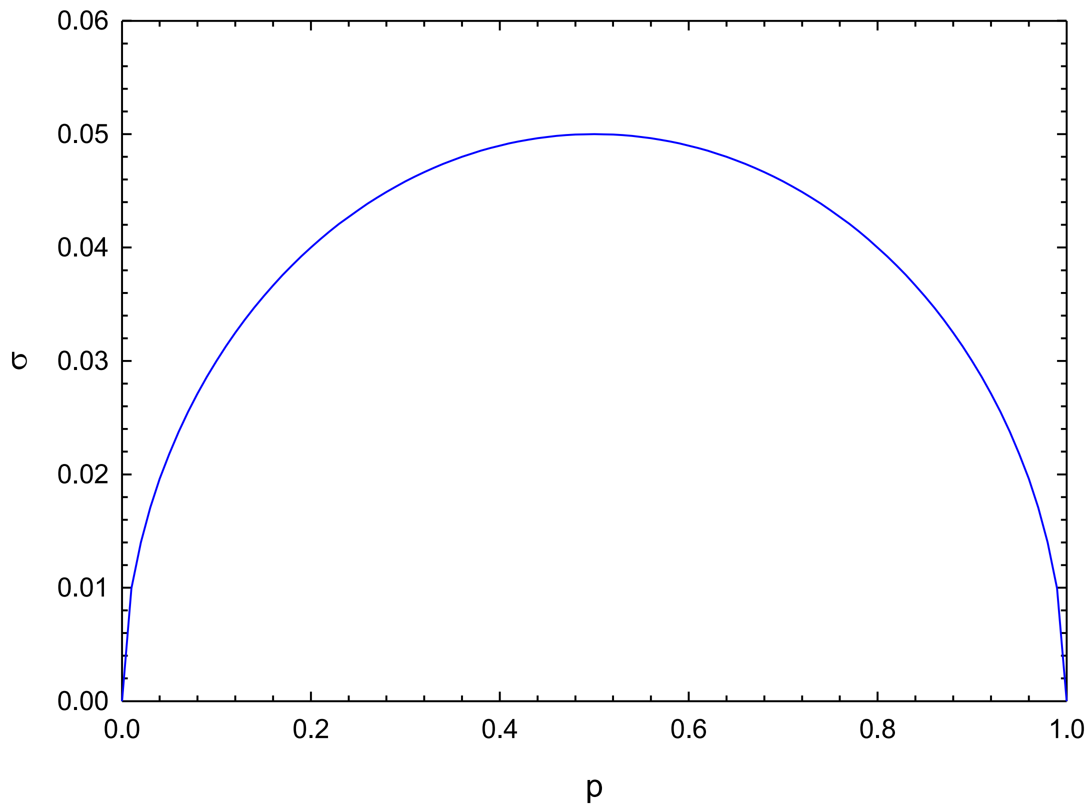
p_0 – poloha maxima posteriorní pravděpodobnosti: $p_0=\frac{k}{N}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f\left(p|o_k\right)}{\mathrm{d}p^2}\right|_{p=p_0}=-\frac{N}{p_0\left(1-p_0\right)} \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx \sqrt{\frac{p_0\left(1-p_0\right)}{N}}$$

Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

Aproximace neurčitosti odhadu p: $\sigma \approx \left(-\frac{\mathrm{d}^2 \ell}{\mathrm{d}p^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{p_0 (1 - p_0)}{N}}$$



Funkce náhodné proměnné – konvoluce

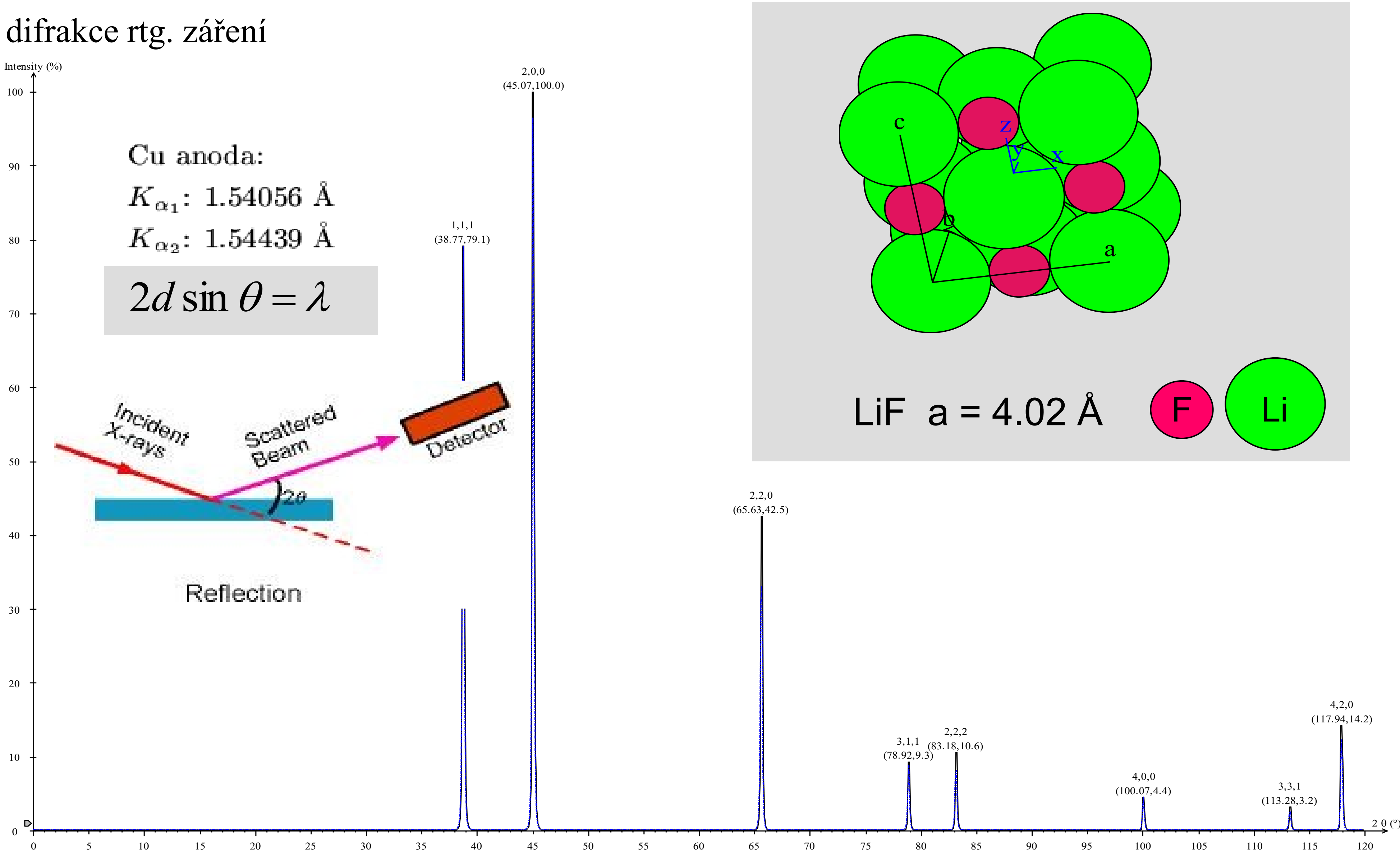
difrakce rtg. záření

Cu anoda:

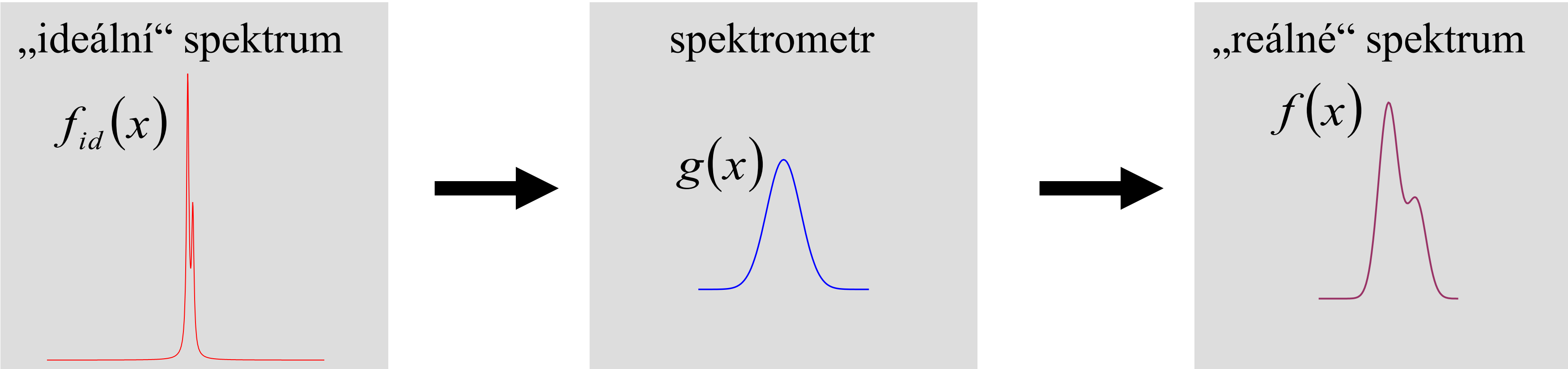
K_{α_1}: 1.54056 Å

K_{α_2}: 1.54439 Å

$$2d \sin\theta = \lambda$$



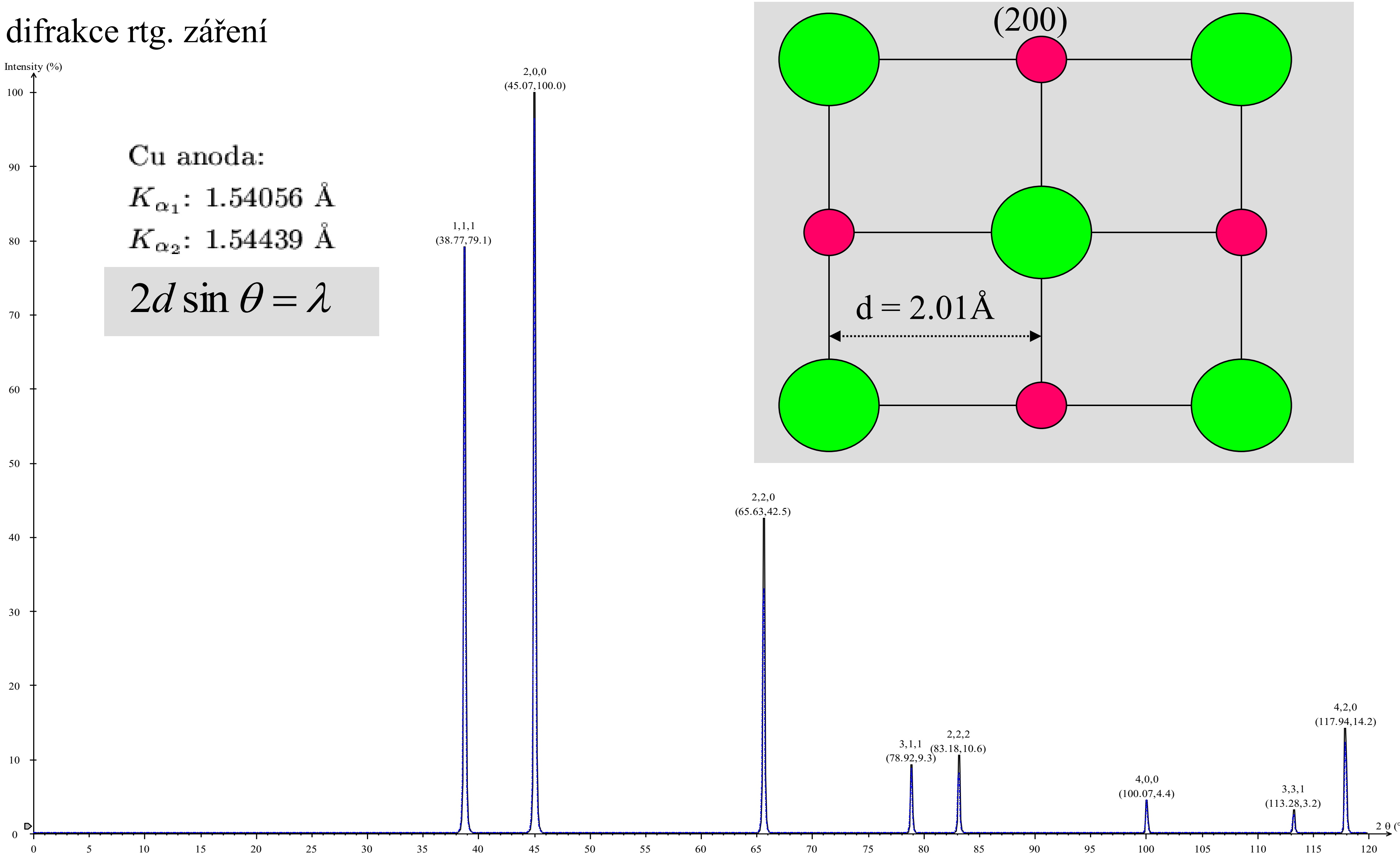
Funkce náhodné proměnné – konvoluce



$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{id}(x-y)\,g(y)\,dy$$

Funkce náhodné proměnné – konvoluce

difrakce rtg. záření



Cu anoda:

K_{α_1}: 1.54056 Å

K_{α_2}: 1.54439 Å

$$2d \sin\theta = \lambda$$

Funkce náhodné proměnné – konvoluce

Pearson VII

$$I(x) = \frac{I_0}{\left[1 + C(x - x_0)^2\right]^m}$$

$$C = \frac{\sqrt[m]{2} - 1}{w^2} \qquad \text{FWHM} = 2w$$

Cu anoda:

K_{α_1}: 1.54056 Å

K_{α_2}: 1.54439 Å