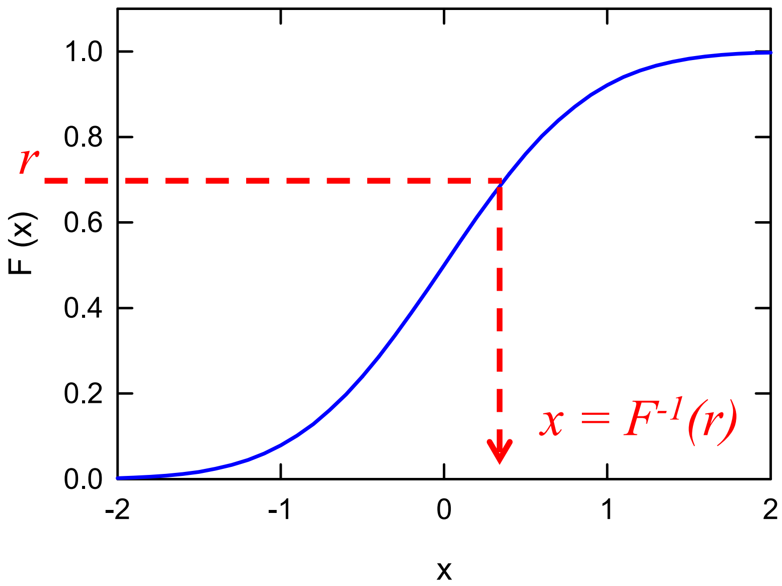
Monte Carlo simulace – metoda inverzní funkce



Metoda inverzní funkce

1. Vygeneruj náhodnou proměnnou r z U(0,1)

2. Vypočítej $x = F^{-1}(r)$,
   kde F^{-1} je inverzní funkce k distribuční funkci $F(x)$ požadovaného rozdělení

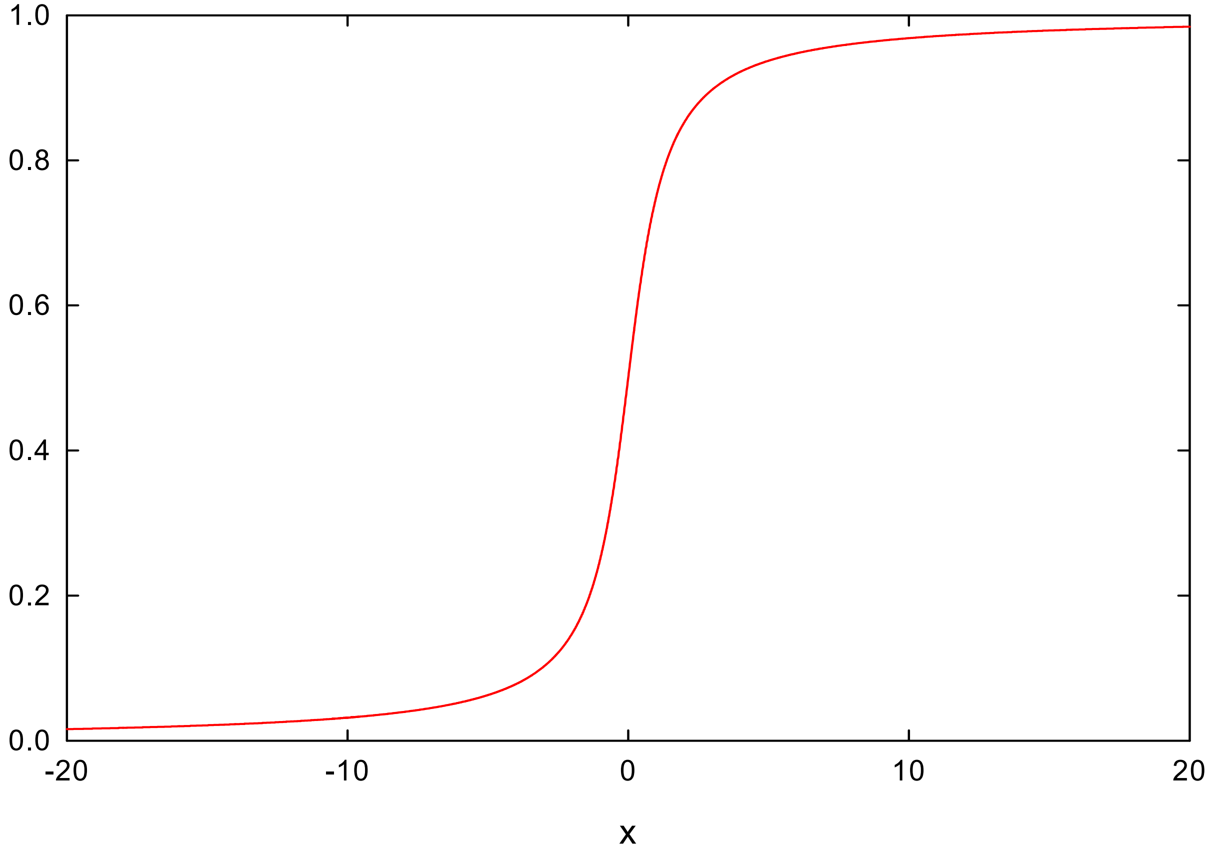
Nechť x je náhodná proměnná s rozdělením popsaným hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ a distribuční funkcí $F(x)$
potom náhodná proměnná $r = F(x)$ má rovnoměrné rozdělní U(0,1)

Cauchyho rozdělení – Metoda inverzní funkce

Distribuční funkce

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\ x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \operatorname{tg}\left[\pi\left(\mathrm{t} - \frac{1}{2}\right)\right] \qquad t \in U(0,1)$$

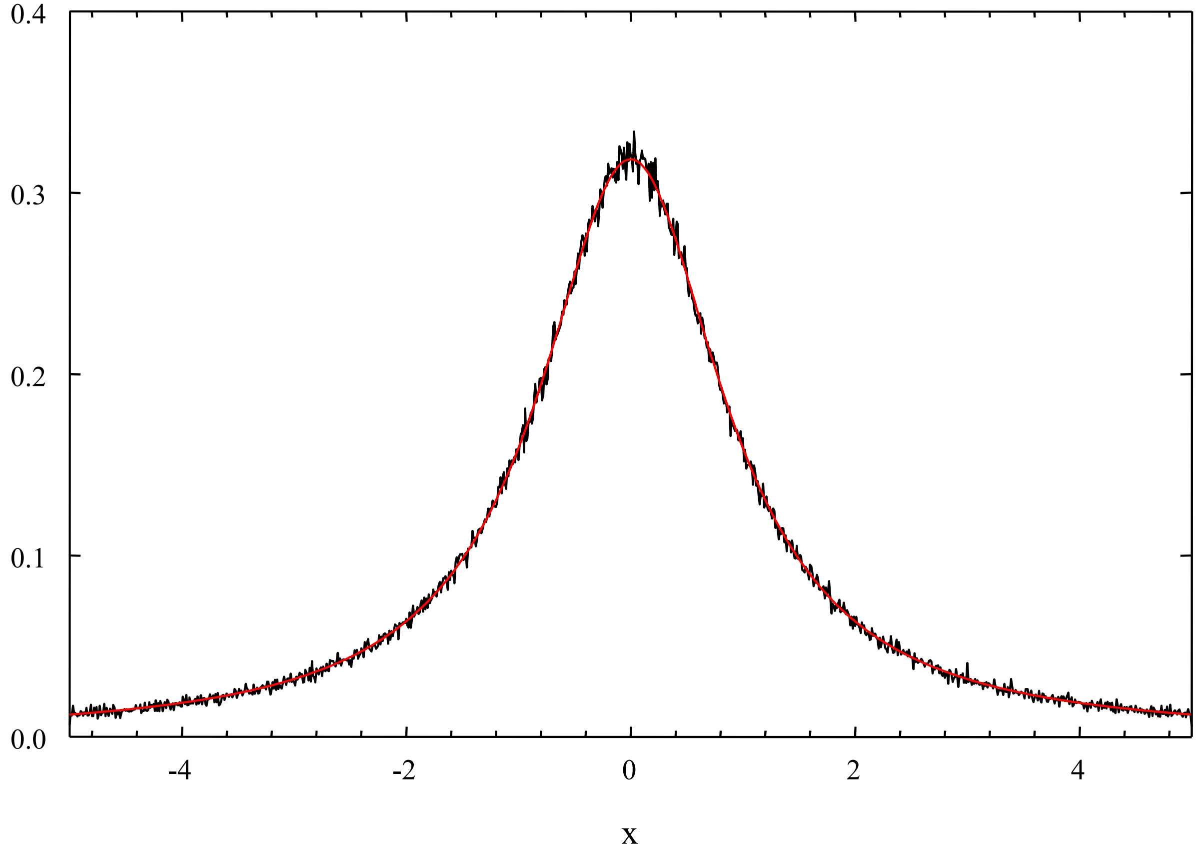


Cauchyho rozdělení – Metoda inverzní funkce

Cauchyho rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$$

$$x = \mathrm{tg}\left[\pi\left(\mathrm{t} - \frac{1}{2}\right)\right] \qquad t \in U(0,1)$$



Centrální limitní věta

- x_i náhodná proměnná s hustotou pravděpodobnosti $f_i(x)$
- x_i nezávislé

$$E\left[x_i\right] = \mu_i \qquad V\left[x_i\right] = \sigma_i^2$$

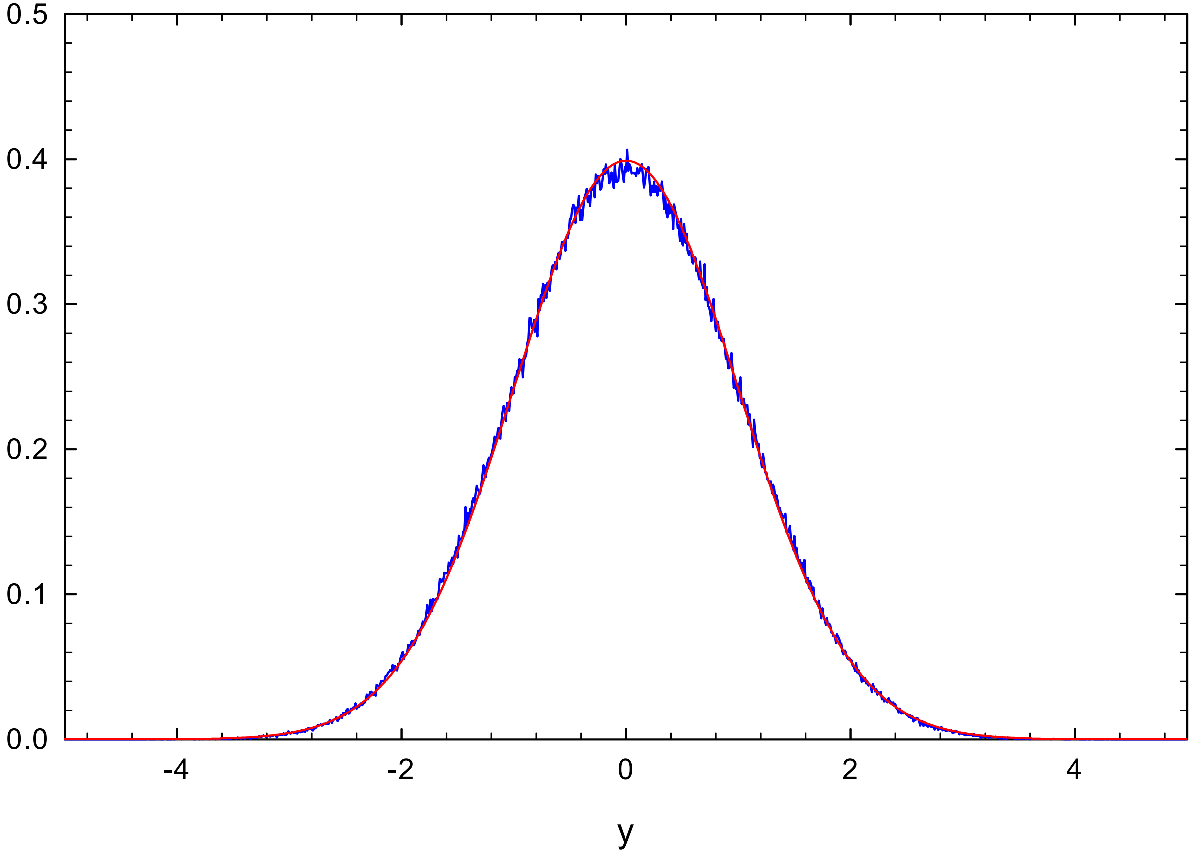
$$y = \sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \text{pro } N \to \infty \text{ je } y \in N\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i, \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2\right)$$

$$\frac{y - \sum_{i=1}^{N} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}} \to N(0,1)$$

Normální rozdělení – využití CLT

$$y = \sum_{i=1}^{12} x_i - 6 \qquad x_i \in U(0,1)$$

$$\text{CLT} \Rightarrow y \approx N(0,1)$$



Normální rozdělení – ad hoc generátor

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\cos 2\pi x_2$$

$$y_2 = \sqrt{-2\ln x_1}\sin 2\pi x_2$$

$$x_{1,2} \in U(0,1)$$

$$x_1 = \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right)$$

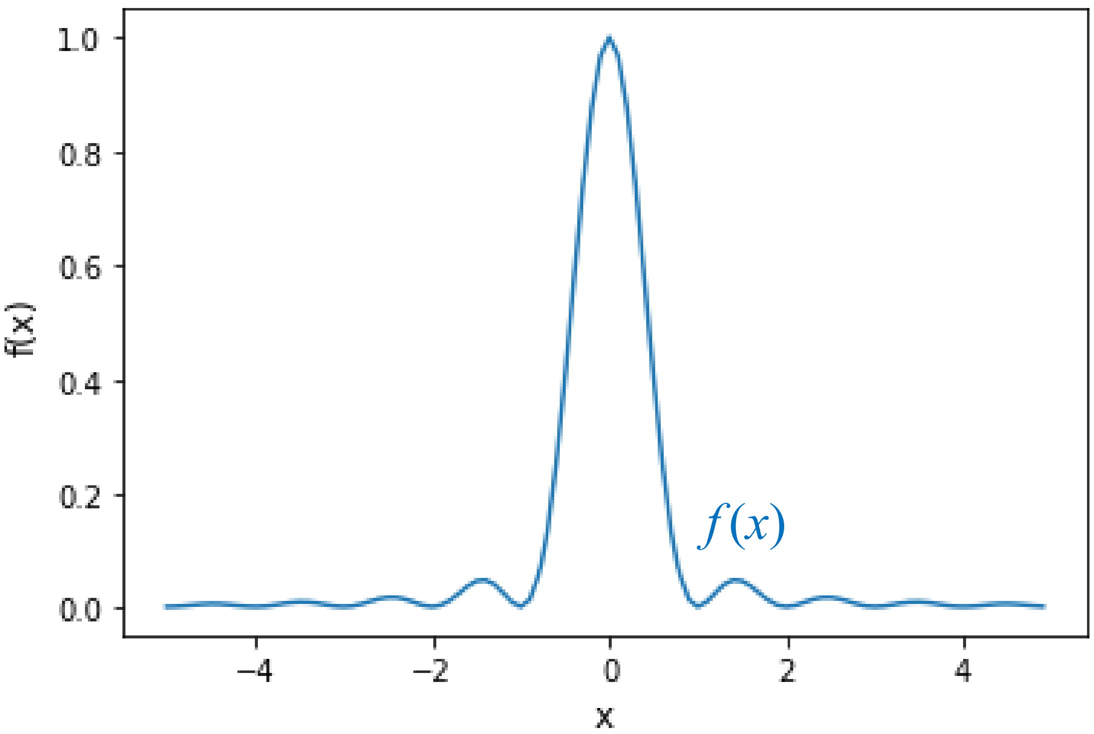
$$x_2 = \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}$$

$$y_{1,2} \in N(0,1)$$

Von Neumannova zamítací metoda

chceme simulovat náhodnou proměnnou x s rozdělením popsaným hustotou pravděpodobnosti $f(x)$



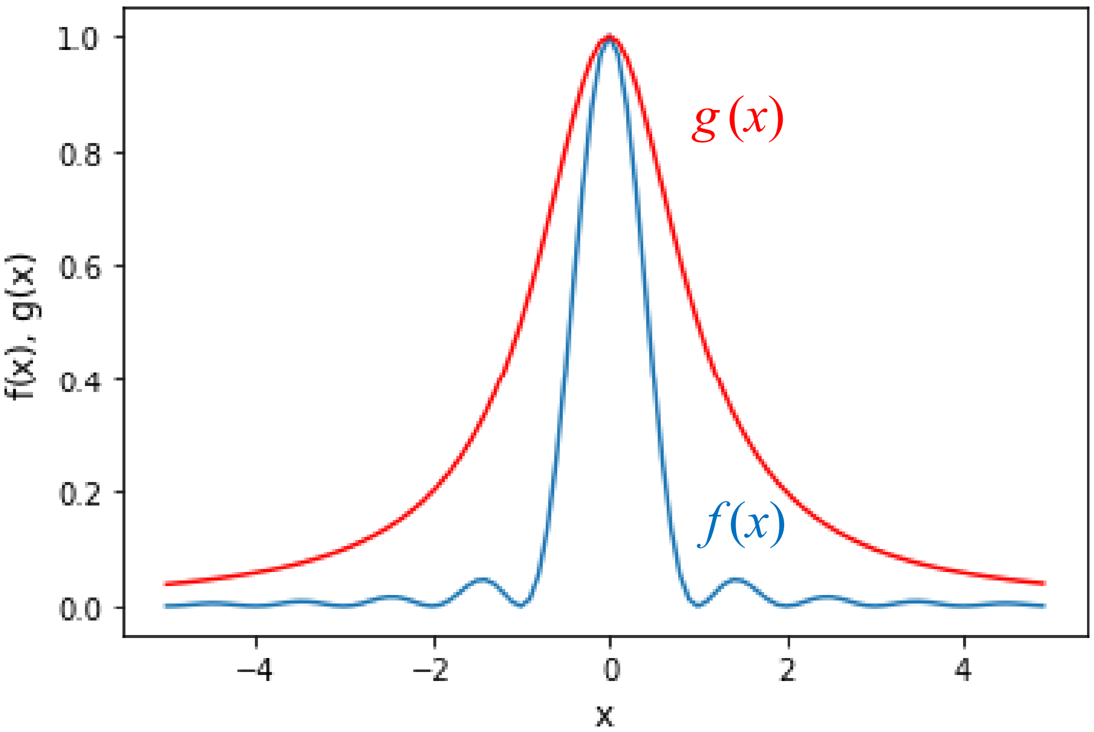
Von Neumannova zamítací metoda

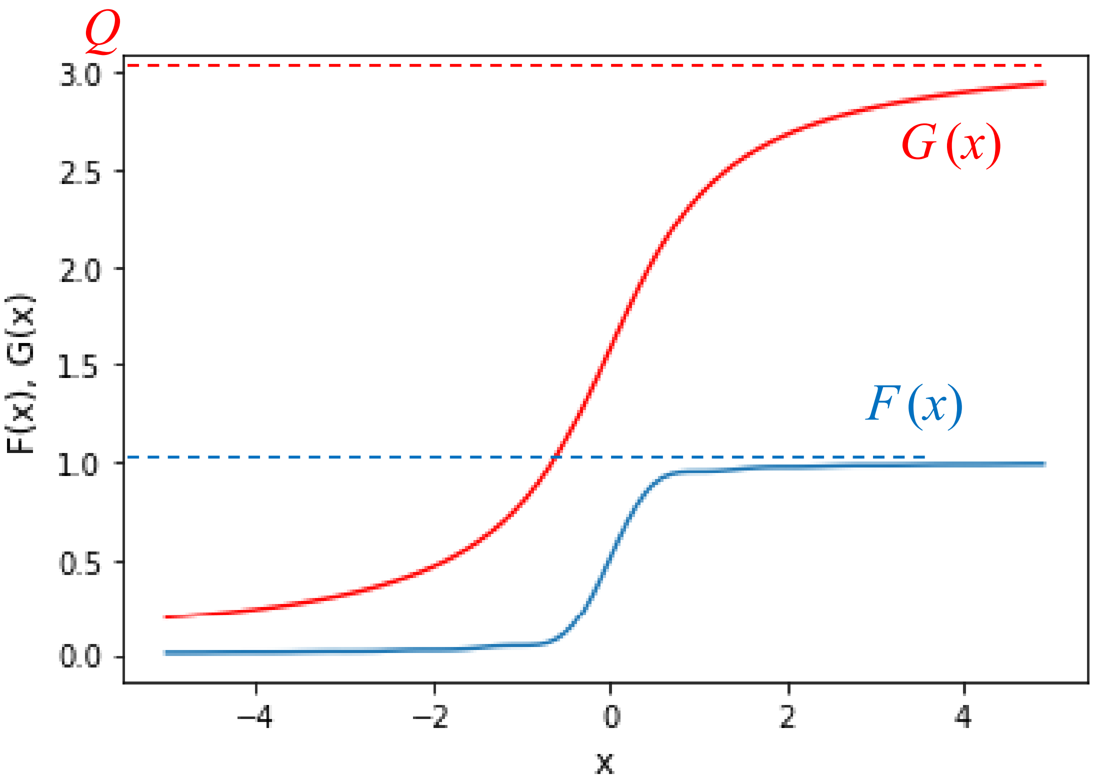
chceme simulovat náhodnou proměnnou x s rozdělením popsaným hustotou pravděpodobnosti $f(x)$

zvolíme si majorizační funkci $g(x)$, takovou, že $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq f(x)$

distribuční funkce $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

integrál majorizační funkce $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt \qquad \lim_{x\to\infty} G(x) = Q$



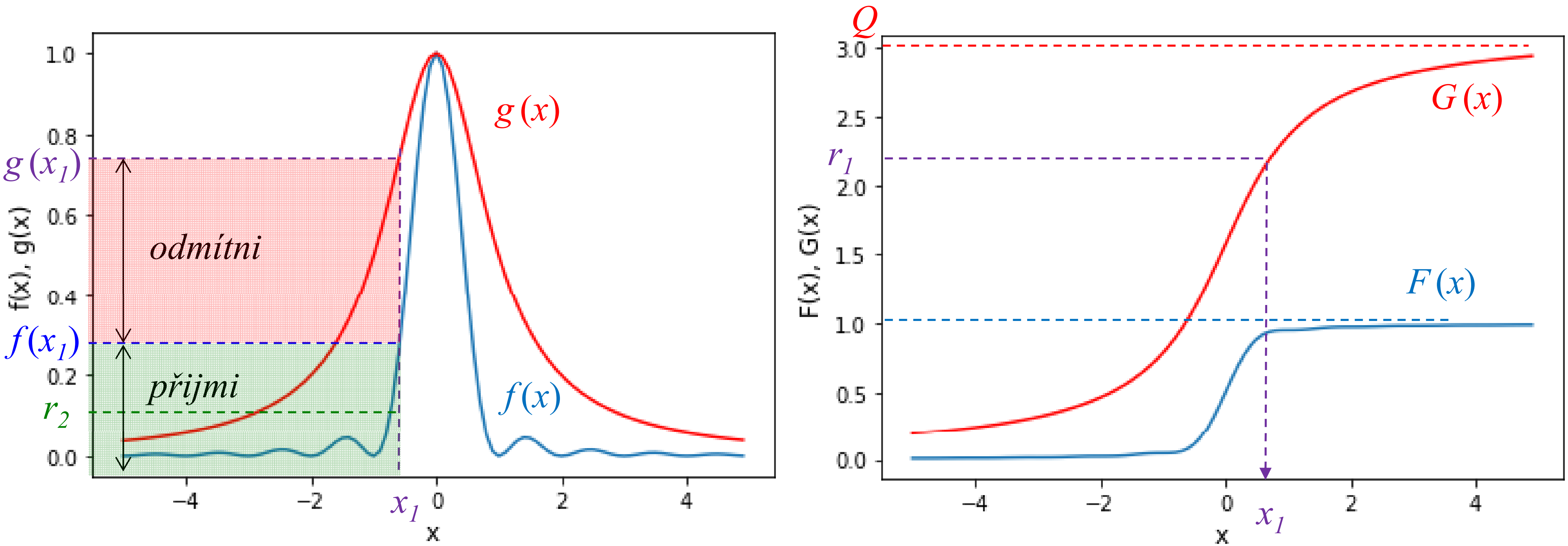


Von Neumannova zamítací metoda

1. vygeneruj $r_1 \in U(0, Q)$
2. vypočítej $x_1 = G^{-1}(r_1)$
3. vygeneruj $r_2 \in U(0, g(x_1))$
4. zkontroluj jestli je $r_2 \leq f(x_1)$

NE: opakuj celé znova

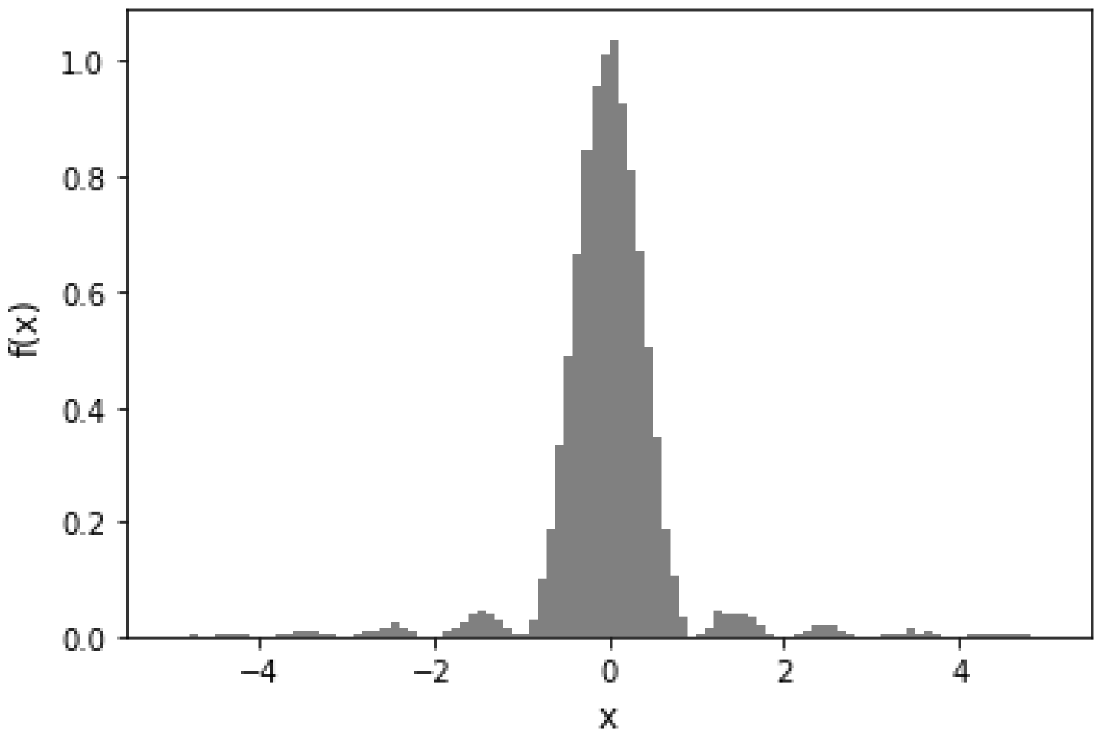
ANO: přijmi x_1



Von Neumannova zamítací metoda

`von-neumann.py`

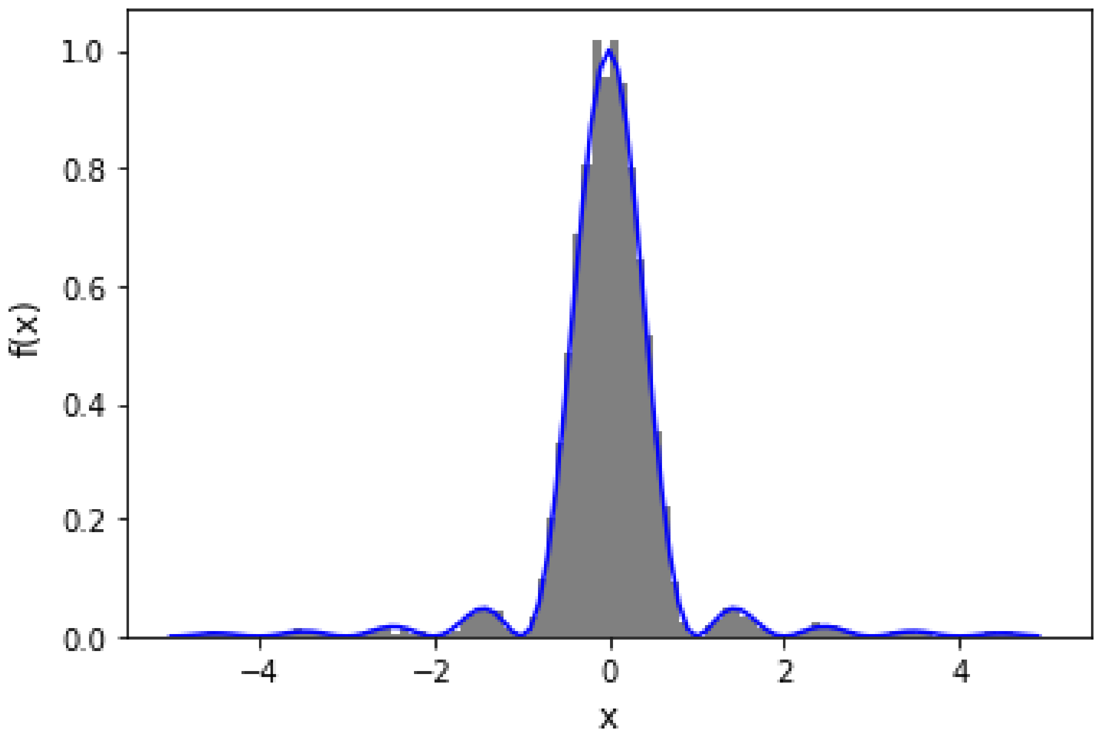
$$f(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$



Von Neumannova zamítací metoda

`von-neumann.py`

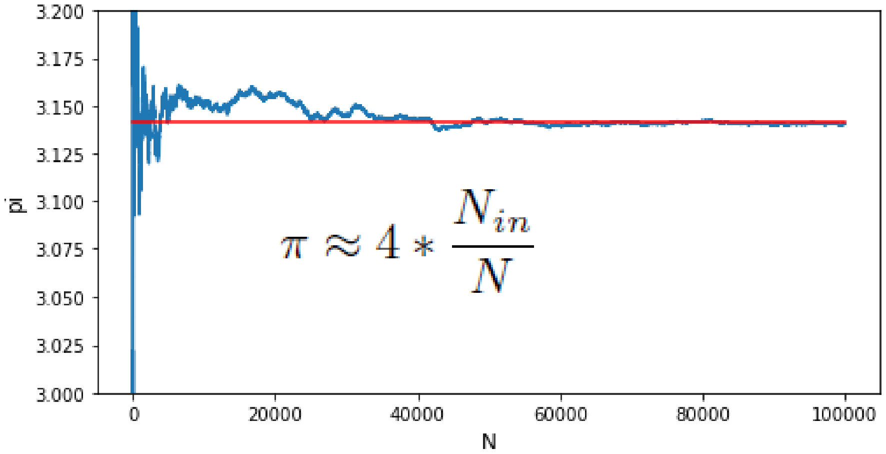
$$f(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

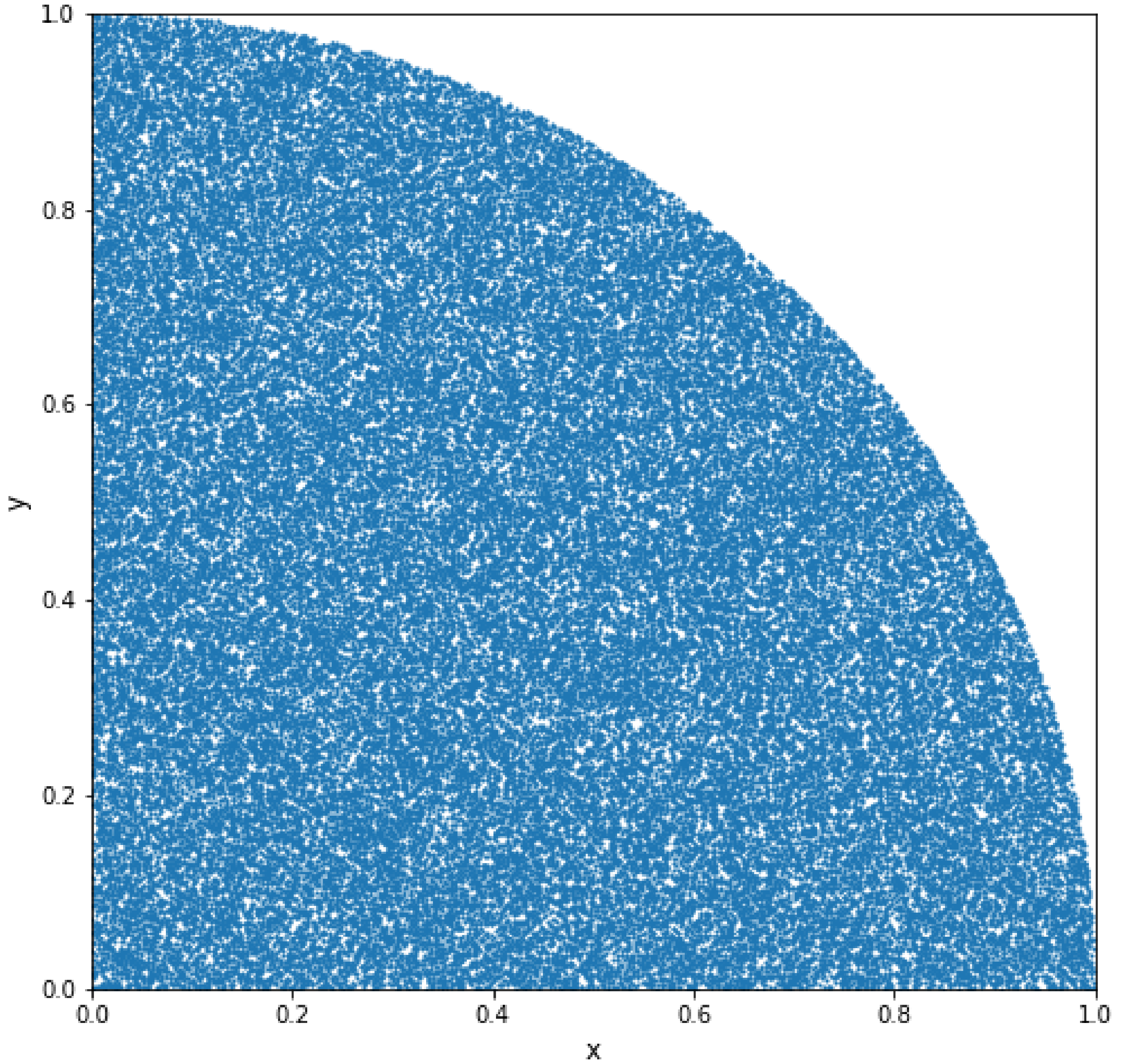


Monte Carlo integrace

`pi.py`

$\pi = 3.14048$





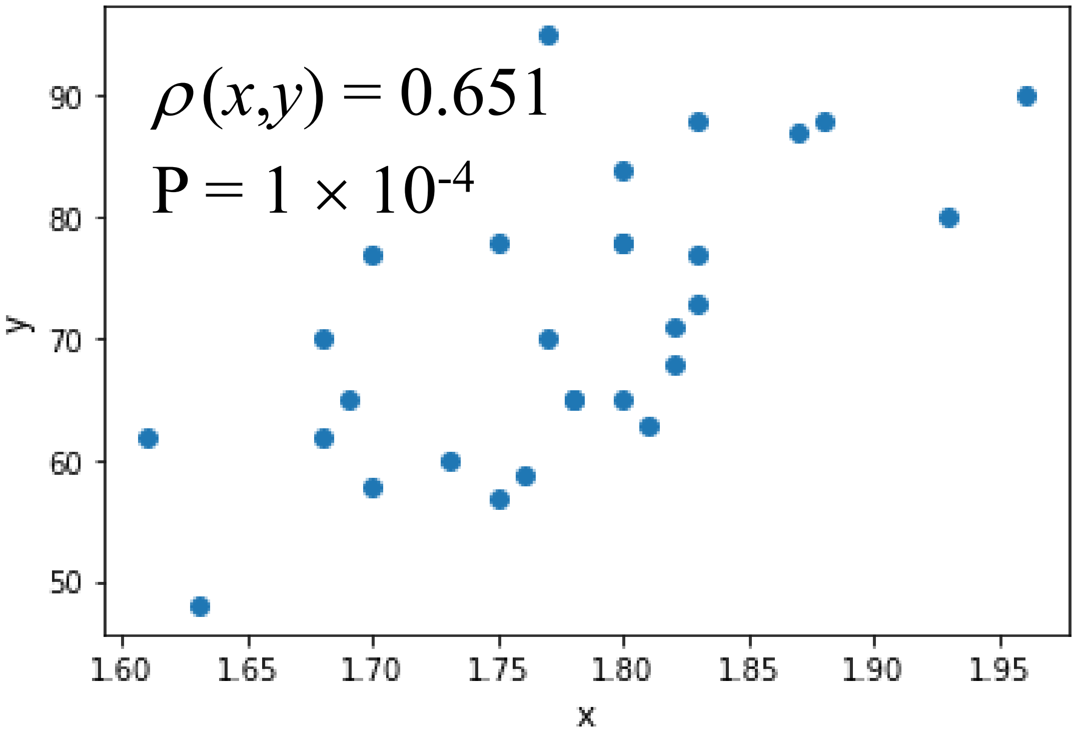
Monte Carlo promíchání

`shuffling.py`

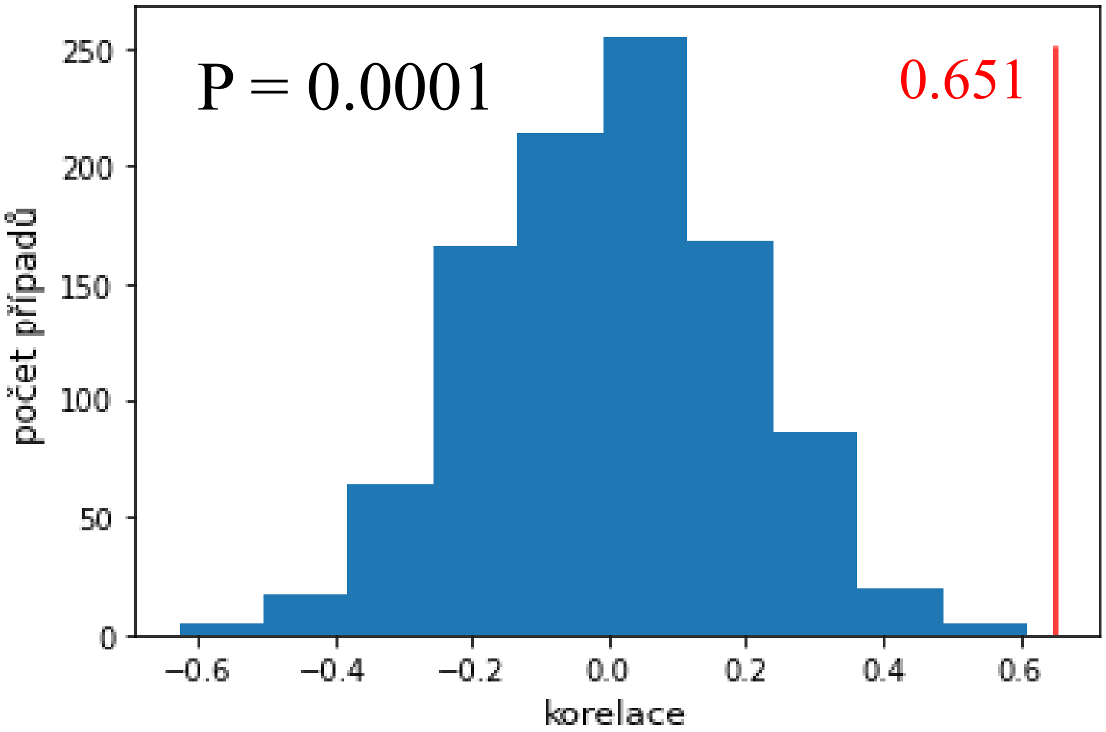
promíchání (shuffling)

pořadí *x*-hodnot bylo náhodně promícháno

a pro každé promíchání byla spočítaná korelace



histogram korelací



Bayesův teorém pro spojitou náhodnou proměnnou

• spojitá náhodná proměnná *x*, hustota pravděpodobnosti *f(x)*

• naměřená data D_N

$$f(x|D_N) = \frac{P(D_N|x)f(x)}{P(D_N)}$$

apriorní hustota pravděpodobnosti

posteriorní hustota pravděpodobnosti

věrohodnost

• zákon celkové pravděpodobnosti

$$P(D_N) = \int_{-\infty}^{\infty} P(D_N|x) f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pravděpodobnost, že zítra vyjde slunce (Laplace)

- po $X = N$ dní slunce zatím vyšlo
- $Y = 1$ slunce zítra vyjde
- $Y = 0$ slunce zítra nevyjde

$$P(Y = 1 | X = N)$$

$$P(Y = 1 | X = N) = \frac{P(Y = 1 \wedge X = N)}{P(X = N)}$$

- θ - pravděpodobnost, že náhodně zvolený den vyjde slunce, $\theta \in U(0,1)$
- zákon celkové pravděpodobnosti:

$$P(Y = 1 | X = N) = \frac{\int_0^1 P(Y = 1 \wedge X = N | \theta) f(\theta) \mathrm{d}\theta}{\int_0^1 P(X = N | \theta) f(\theta) \mathrm{d}\theta} = \frac{\int_0^1 \theta^{N+1} \mathrm{d}\theta}{\int_0^1 \theta^N \mathrm{d}\theta} = \frac{N+1}{N+2}$$

- začátek civilizace 3000 př. Kr.
- slunce už vychází 5000 let = 1 825 000 dní

$$P(Y = 1 | X = N) = \frac{1825001}{1825002} = 0.99999945$$

kurz na východ slunce: 1 825 001 : 1