Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce

diskrétní náhodná proměnná

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$ konečná

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ nekonečná

$P(x = x_i) \equiv P_i$ pst. že nastane výsledek x_i

normalizační podmínka

$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$ konečná

$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ nekonečná

spojitá náhodná proměnná

Ω nespočetná

$P(x \in \langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x \rangle) \equiv f(x_0)\mathrm{d}x$

pst. že nastane výsledek padne do intervalu $\langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x \rangle$

$f(x)$ **hustota pravděpodobnosti**

$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ **distribuční funkce**

$P(x \in \langle a, b \rangle) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

normalizační podmínka: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

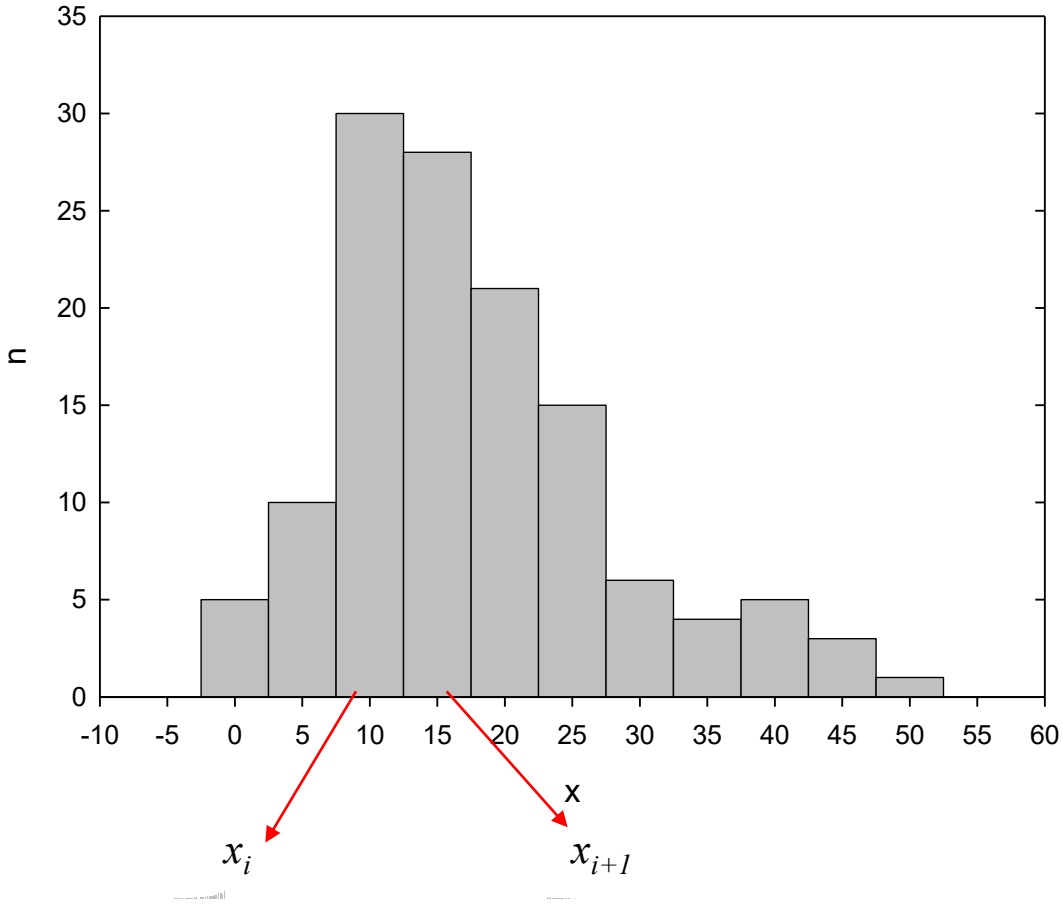
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

Histogram

Histogram – způsob jak experimentálně zjistit hustotu pravděpodobnosti z experimentálních dat



šířka binu: $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$

plocha histogramu: $\sum_{i=1}^{m} n_i \Delta_i$

$$\Downarrow$$

normalizovaný histogram:

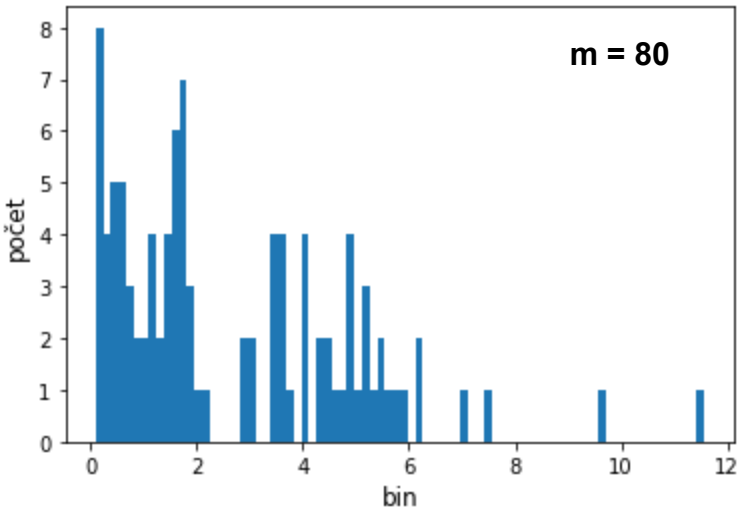
$$\xi_i = \frac{n_i}{\Delta_i N}, \quad \text{kde} \quad N = \sum_{i=1}^{m} n_i$$

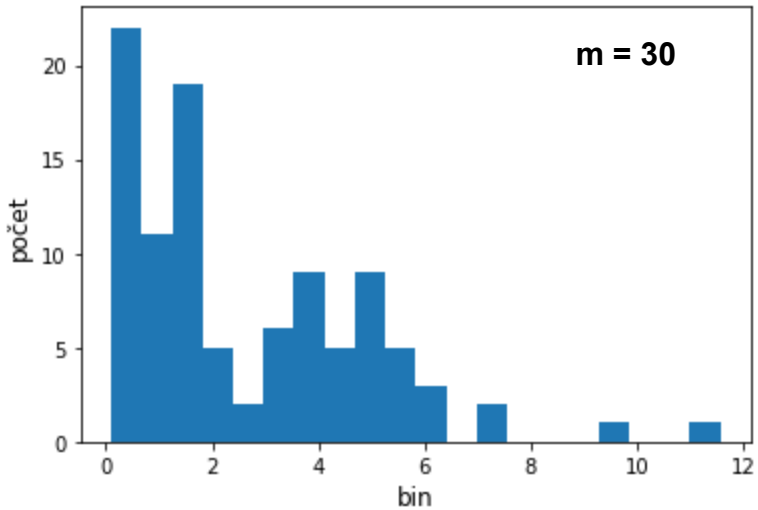
plocha normovaného histogramu: $\sum_{i=1}^{m} \xi_i \Delta_i = 1$

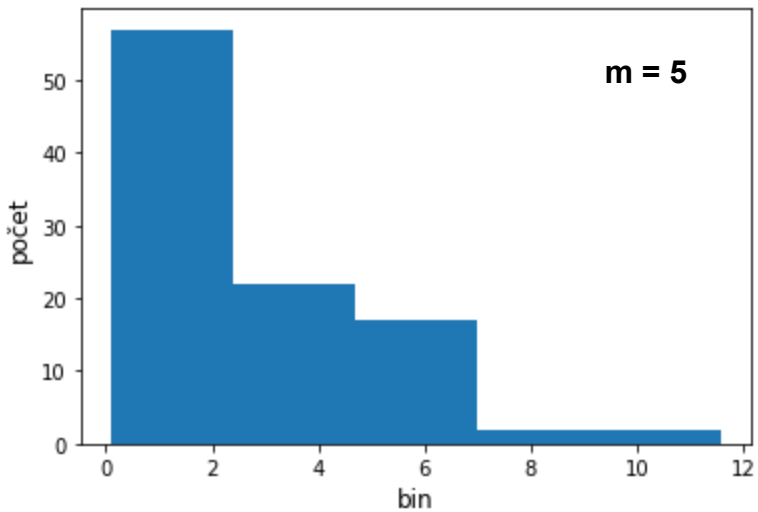
hustota pravděpodobnosti:

$$f(x_i) = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \xi_i = \lim_{\substack{\Delta_i \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{n_i}{\Delta_i N}$$

Histogram – šířka binu







1.234	0.628	3.721
0.118	5.380	0.194
1.260	6.168	0.509
5.926	5.752	0.683
5.201	4.813	7.508
1.426	3.418	0.146
4.457	2.063	3.676
0.627	4.335	3.659
0.635	4.086	3.452
6.980	4.964	1.519
3.539	0.380	3.616
1.579	1.237	2.122
0.337	1.573	1.463
0.413	0.171	1.844
6.202	4.354	0.195
0.427	4.504	2.979
1.219	1.525	4.935
1.723	4.041	4.574
5.124	0.805	1.658
2.910	2.883	1.936
1.745	0.101	1.226
0.434	5.508	1.308
1.695	3.642	1.564
1.046	1.695	5.611
5.171	5.047	0.745
1.784	4.089	9.622
2.973	5.504	
3.420	1.686	
4.847	4.935	
0.190	11.565	
4.106	0.350	
0.850	0.411	
0.584	0.321	
1.048	0.668	
1.823	1.636	
1.644	0.825	
1.779	0.210	

- **šířka binu** $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$

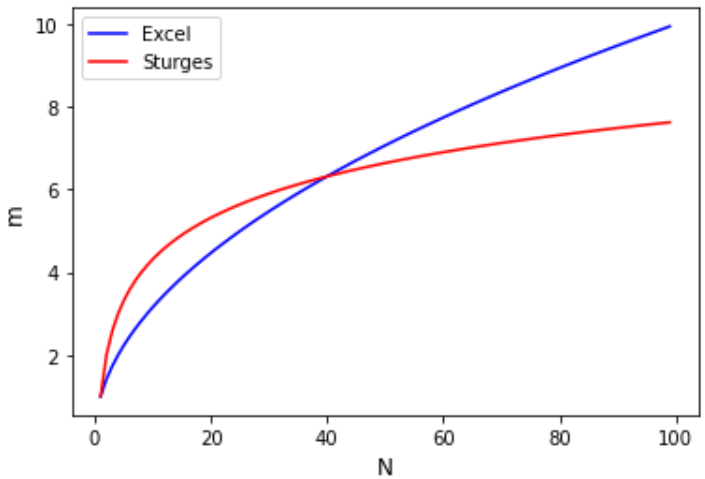
počet binů

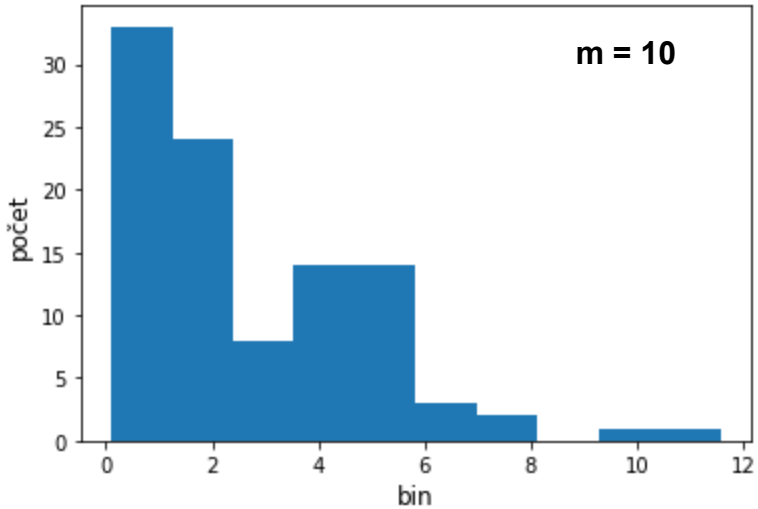
Excel $m = \left[\sqrt{N}\right]$

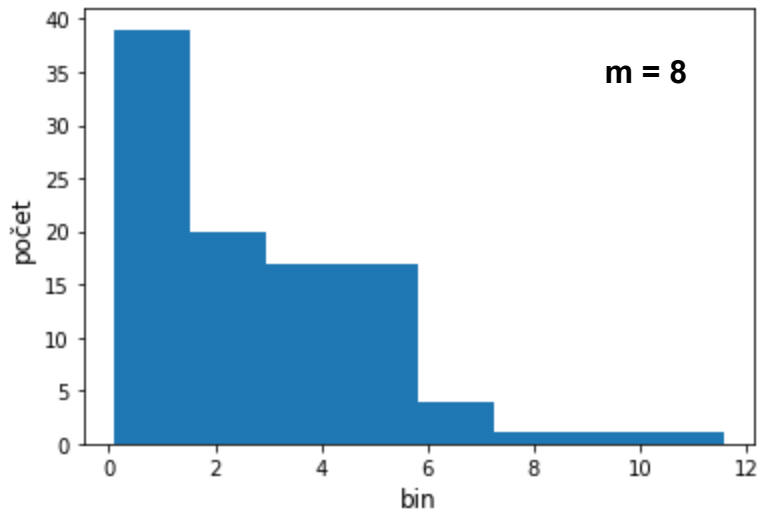
$$m = \left[\frac{\log N}{\log 2} + 1\right]$$

H. A. Sturges, J. American Statistical Association, 65–66 (1926).

Histogram – šířka binu







1.234	0.628	3.721
0.118	5.380	0.194
1.260	6.168	0.509
5.926	5.752	0.683
5.201	4.813	7.508
1.426	3.418	0.146
4.457	2.063	3.676
0.627	4.335	3.659
0.635	4.086	3.452
6.980	4.964	1.519
3.539	0.380	3.616
1.579	1.237	2.122
0.337	1.573	1.463
0.413	0.171	1.844
6.202	4.354	0.195
0.427	4.504	2.979
1.219	1.525	4.935
1.723	4.041	4.574
5.124	0.805	1.658
2.910	2.883	1.936
1.745	0.101	1.226
0.434	5.508	1.308
1.695	3.642	1.564
1.046	1.695	5.611
5.171	5.047	0.745
1.784	4.089	9.622
2.973	5.504	
3.420	1.686	
4.847	4.935	
0.190	11.565	
4.106	0.350	
0.850	0.411	
0.584	0.321	
1.048	0.668	
1.823	1.636	
1.644	0.825	
1.779	0.210	

- **šířka binu** $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$

počet binů

Excel $m = \left[\sqrt{N}\right] = 10$

$$m = \left[\frac{\log N}{\log 2} + 1\right] = 8$$

H. A. Sturges, J. American Statistical Association, 65–66 (1926).

Histogram – šířka binu

`optimal_bin_width.py`

Algoritmus pro nalezení optimální šířky binu

H. Shimazaki, S. Shinomoto, *Neural Comput* **19** (2007) 1503-1527

1. zvol počet binů m, vypočítej šířku binu $\Delta = (x_{max}-x_{min})/m$ a vyrob histogram

2. vypočítej
   - odhad střední hodnoty výšky sloupečků histogramu: $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} N_i$
   - odhad rozptylu výšek sloupečků histogramu: $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(N_i - \hat{\mu})^2$

3. vypočítej "ztrátovou funkci" $C(\Delta) = \frac{2\hat{\mu} - \hat{\sigma}^2}{\Delta^2}$

opakuj pro různé počty binů m (tj. různé Δ)

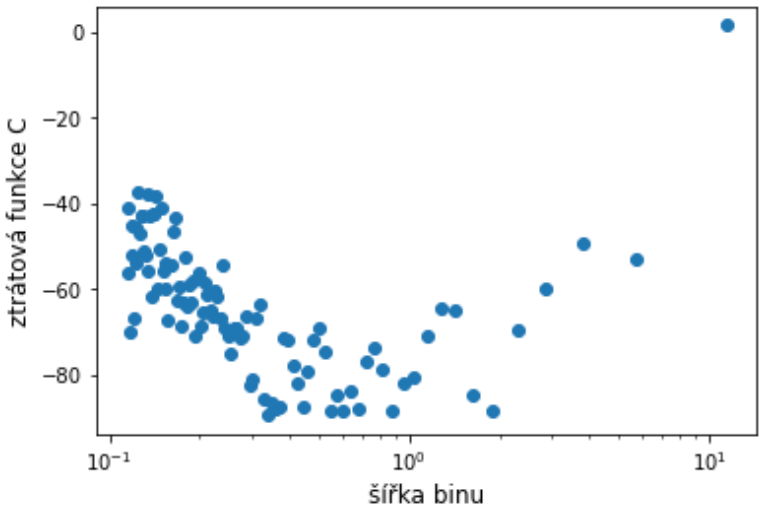
4. Vyber takové Δ, pro které je C minimální

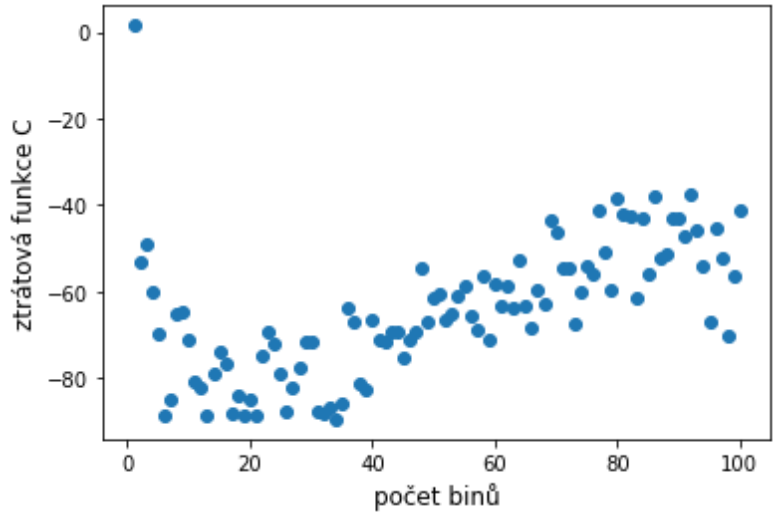
Histogram – šířka binu

`optimal_bin_width.py`

Algoritmus pro nalezení optimální šířky binu

H. Shimazaki, S. Shinomoto, *Neural Comput* **19** (2007) 1503-1527





1.234	0.628	3.721
0.118	5.380	0.194
1.260	6.168	0.509
5.926	5.752	0.683
5.201	4.813	7.508
1.426	3.418	0.146
4.457	2.063	3.676
0.627	4.335	3.659
0.635	4.086	3.452
6.980	4.964	1.519
3.539	0.380	3.616
1.579	1.237	2.122
0.337	1.573	1.463
0.413	0.171	1.844
6.202	4.354	0.195
0.427	4.504	2.979
1.219	1.525	4.935
1.723	4.041	4.574
5.124	0.805	1.658
2.910	2.883	1.936
1.745	0.101	1.226
0.434	5.508	1.308
1.695	3.642	1.564
1.046	1.695	5.611
5.171	5.047	0.745
1.784	4.089	9.622
2.973	5.504	
3.420	1.686	
4.847	4.935	
0.190	11.565	
4.106	0.350	
0.850	0.411	
0.584	0.321	
1.048	0.668	
1.823	1.636	
1.644	0.825	
1.779	0.210	

- **šířka binu** $\Delta = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$

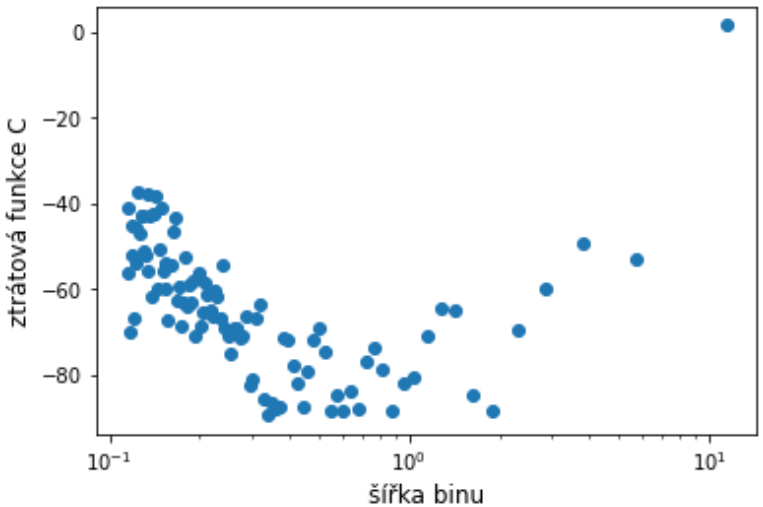
počet binů

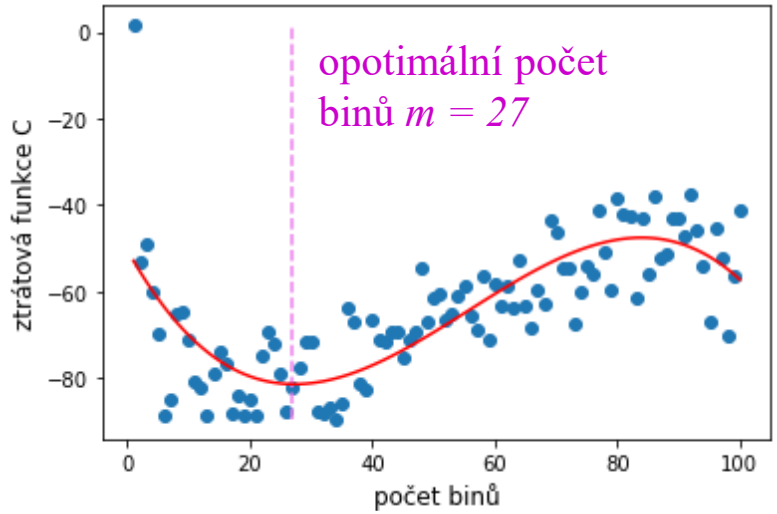
Histogram – šířka binu

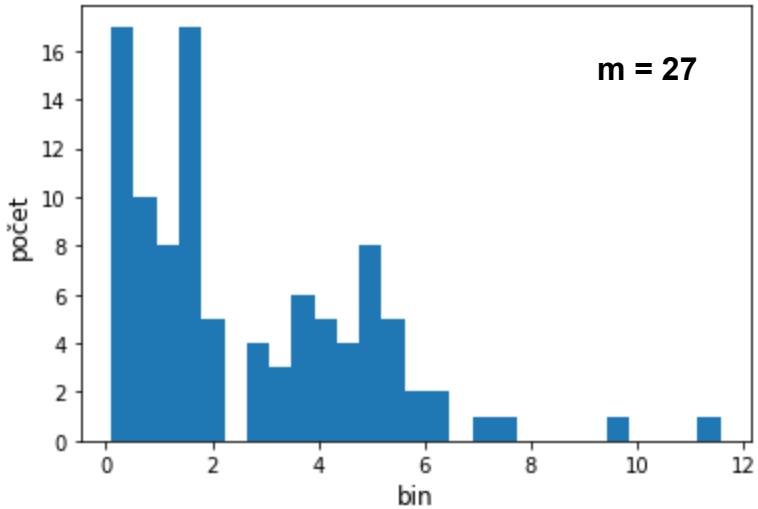
`optimal_bin_width.py`

Algoritmus pro nalezení optimální šířky binu

H. Shimazaki, S. Shinomoto, *Neural Comput* **19** (2007) 1503-1527







1.234	0.628	3.721
0.118	5.380	0.194
1.260	6.168	0.509
5.926	5.752	0.683
5.201	4.813	7.508
1.426	3.418	0.146
4.457	2.063	3.676
0.627	4.335	3.659
0.635	4.086	3.452
6.980	4.964	1.519
3.539	0.380	3.616
1.579	1.237	2.122
0.337	1.573	1.463
0.413	0.171	1.844
6.202	4.354	0.195
0.427	4.504	2.979
1.219	1.525	4.935
1.723	4.041	4.574
5.124	0.805	1.658
2.910	2.883	1.936
1.745	0.101	1.226
0.434	5.508	1.308
1.695	3.642	1.564
1.046	1.695	5.611
5.171	5.047	0.745
1.784	4.089	9.622
2.973	5.504	
3.420	1.686	
4.847	4.935	
0.190	11.565	
4.106	0.350	
0.850	0.411	
0.584	0.321	
1.048	0.668	
1.823	1.636	
1.644	0.825	
1.779	0.210	

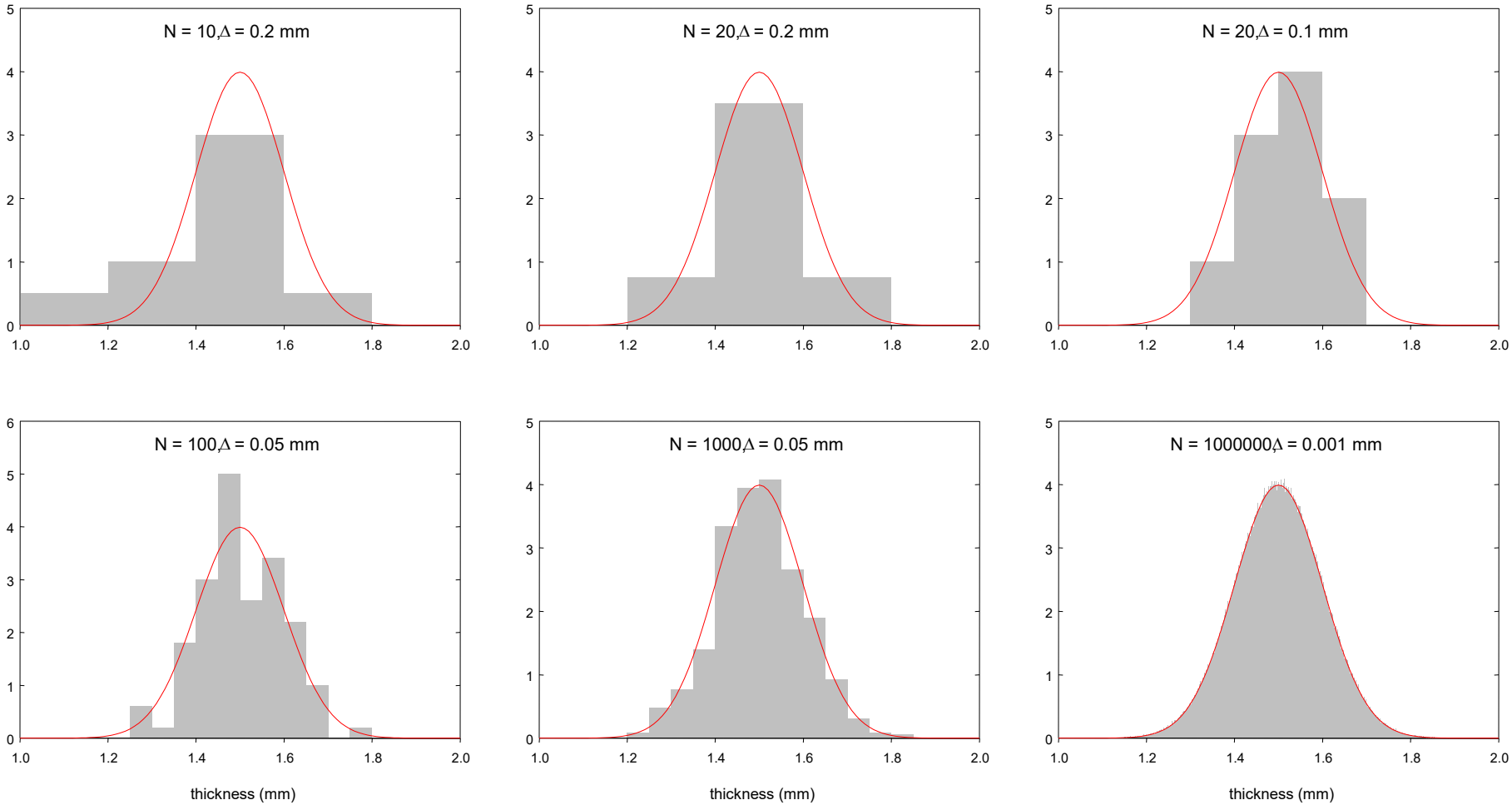
Hustota pravděpodobnosti – Měření tloušťky vzorku

μ = 1.5 mm, σ = 0.1 mm

hustota pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

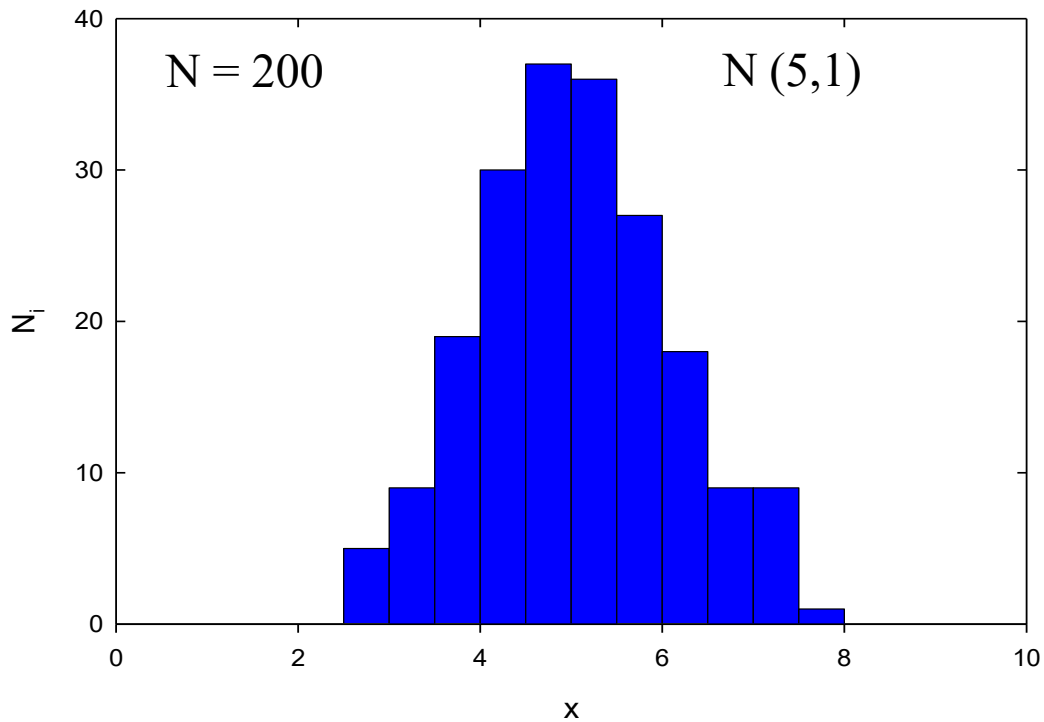
- počet naměřených hodnot: N
- šířka binu: Δ

$$f(x_i) \approx \frac{n_i}{\Delta N} \qquad N \to \infty, \Delta \to 0$$



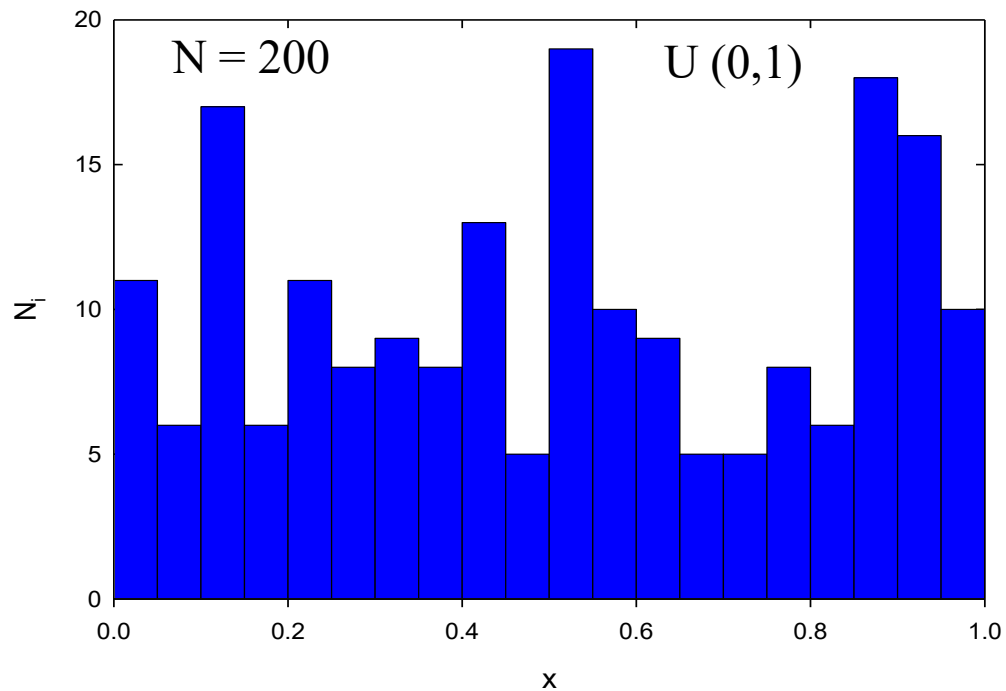
Míry polohy

- aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 5.04$
- geometrický průměr: $\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N} = 4.93$
- harmonický průměr: $\bar{x}_h = N\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}\right)^{-1} = 4.81$
- root mean square (rms): $\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = 5.14$
- medián: $x_{\frac{1}{2}} = 5.01$



Míry polohy

- aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 0.51$
- geometrický průměr: $\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N} = 0.37$
- harmonický průměr: $\bar{x}_h = N\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}\right)^{-1} = 0.16$
- root mean square (rms): $\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = 0.59$
- medián: $x_{\frac{1}{2}} = 0.51$



Očekávaná hodnota

- operátor střední (očekávané) hodnoty $\mu = E[x]$

- diskrétní náhodná proměnná: $$\mu \equiv E[x] = \sum_i x_i P_i$$

- spojitá náhodná proměnná: $$\mu \equiv E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

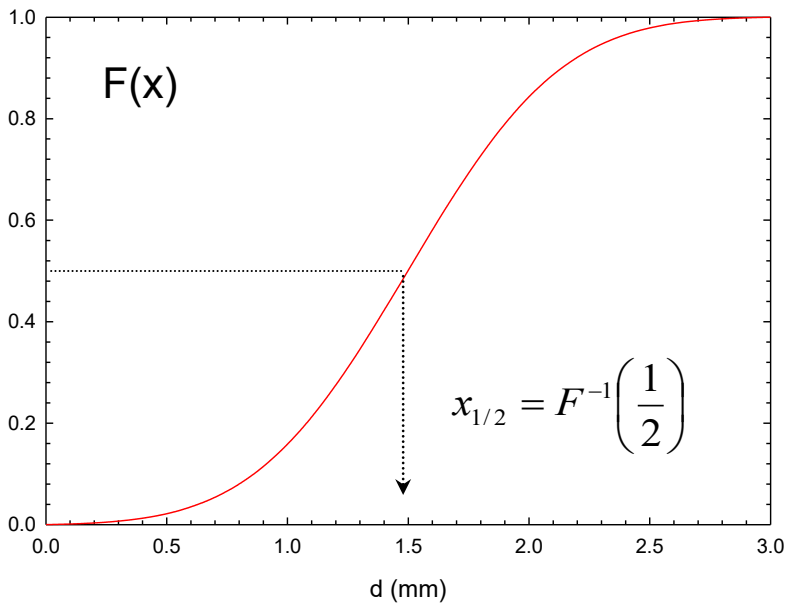
- vážený průměr: $$\overline{x}_w = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}$$

$$w_i = P_i$$

Distribuční funkce, kvantily

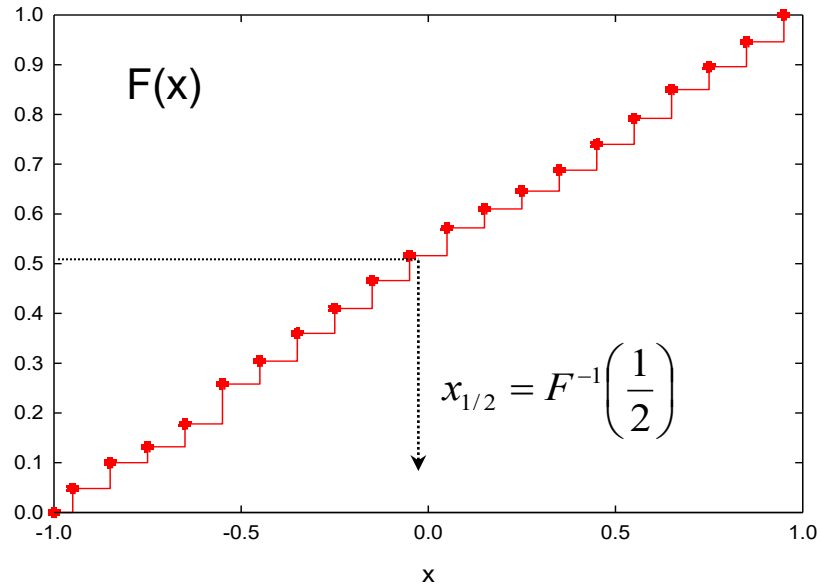
spojitá náhodná proměnná

distribuční funkce



diskrétní náhodná proměnná

distribuční funkce



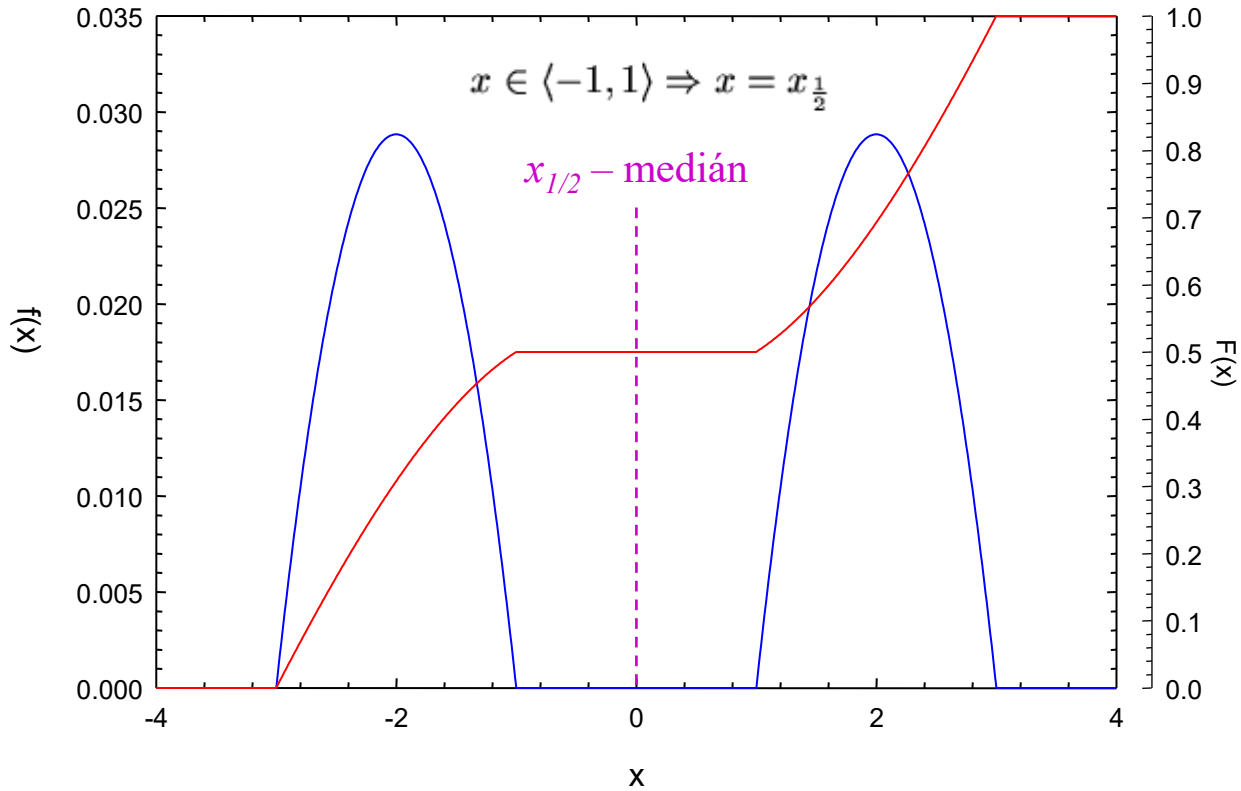
x_α – kvantil řádu α (α-bod):

$$F(x_\alpha) = \alpha \qquad (0 \le \alpha \le 1)$$

$x_{1/2}$ – medián

Medián

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{104}(x^2+4x+3), & x \in \langle -3, -1 \rangle \\ -\frac{3}{104}(x^2-4x+3), & x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$



Průměr a medián

Příklad:

	2016	2017
	Cena 1.000.000 Kč Prodáno 200 ks	Cena 2.000.000 Kč Prodáno 200 ks
	Cena 300.000 Kč Prodáno 10.000 ks	Cena 290.000 Kč Prodáno 10.000 ks
	Průměr: 313.726 Kč Medián: 300.000 Kč	323.529 Kč 290.000 Kč

Vážený aritmetický průměr

vážený aritmetický průměr: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

- průměr dat naměřených s různou přesností (chybou)

- průměr průměrů

Měření	1	2	3
Počet dat	10	4	20
Průměr	14.2	10.3	12.5

průměr: $$\frac{14.2 + 10.3 + 12.5}{3} = 12.3$$

vážený průměr: $$\frac{10 \times 14.2 + 4 \times 10.3 + 20 \times 12.5}{10 + 4 + 20} = 12.7$$

Vážený aritmetický průměr

obchodní cestující

- 2 týdny, celkem 100 osob

	1. týden	2.týden	
Jana	67%	10%	
Martin	**90%**	**33%**	

Vážený aritmetický průměr

obchodní cestující

- 2 týdny, celkem 100 osob

	1. týden	2.týden	celkem
Jana	67%	10%	**61%**
Martin	**90%**	**33%**	39%

Simpsonův paradox

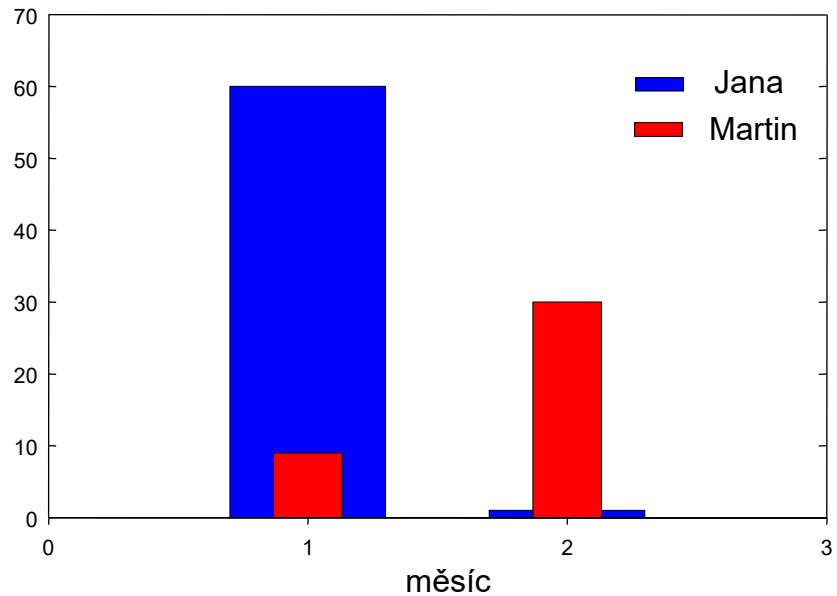
Vážený aritmetický průměr

obchodní cestující

- 2 týdny, celkem 100 osob

	1. týden	2.týden	Celkem
Jana	60/90 = 67%	1/10 = 10%	61/100 = **61%**
Martin	9/10 = **90%**	30/90 = **33%**	39/100 = 39%

Simpsonův paradox



vážený aritmetický průměr:

Jana: $$\frac{90 \times 0.67 + 10 \times 0.10}{100} = 0.61$$

Martin: $$\frac{10 \times 0.90 + 90 \times 0.33}{100} = 0.39$$

Simpsonův paradox

Science 7 February 1975:
Vol. 187. no. 4175, pp. 398 - 404
DOI: 10.1126/science.187.4175.398

ARTICLES

Sex Bias in Graduate Admissions: Data from Berkeley

P. J. Bickel [1], E. A. Hammel [1], and J. W. O'Connell [1]

[1] University of California, Berkeley 94720

Examination of aggregate data on graduate admissions to the University of California, Berkeley, for fall 1973 shows a clear but misleading pattern of bias against female applicants. Examination of the disaggregated data reveals few decision-making units that show statistically significant departures from expected frequencies of female admissions, and about as many units appear to favor women as to favor men. If the data are properly pooled, taking into account the autonomy of departmental decision making, thus correcting for the tendency of women to apply to graduate departments that are more difficult for applicants of either sex to enter, there is a small but statistically significant bias in favor of women. The graduate departments that are easier to enter tend to be those that require more mathematics in the undergraduate preparatory curriculum. The bias in the aggregated data stems not from any pattern of discrimination on the part of admissions committees, which seem quite fair on the whole, but apparently from prior screening at earlier levels of the educational system. Women are shunted by their socialization and education toward fields of graduate study that are generally more crowded, less productive of completed degrees, and less well funded, and that frequently offer poorer professional employment prospects.

Simpsonův paradox

University of California, Berkeley 1973

	Applicants	% admitted
Men	8442	**44%**
Women	4321	35%

Major	Men		Women	
	Applicants	% admitted	Applicants	% admitted
A	825	62%	108	**82%**
B	560	63%	25	**68%**
C	325	**37%**	593	34%
D	417	33%	375	**35%**
E	191	**28%**	393	24%
F	272	6%	341	**7%**

Míry polohy a rozptylu

- aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 5.04$

- geometrický průměr: $\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N} = 4.93$

- harmonický průměr: $\bar{x}_h = N\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}\right)^{-1} = 4.81$

- root mean square (rms): $\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = 5.14$

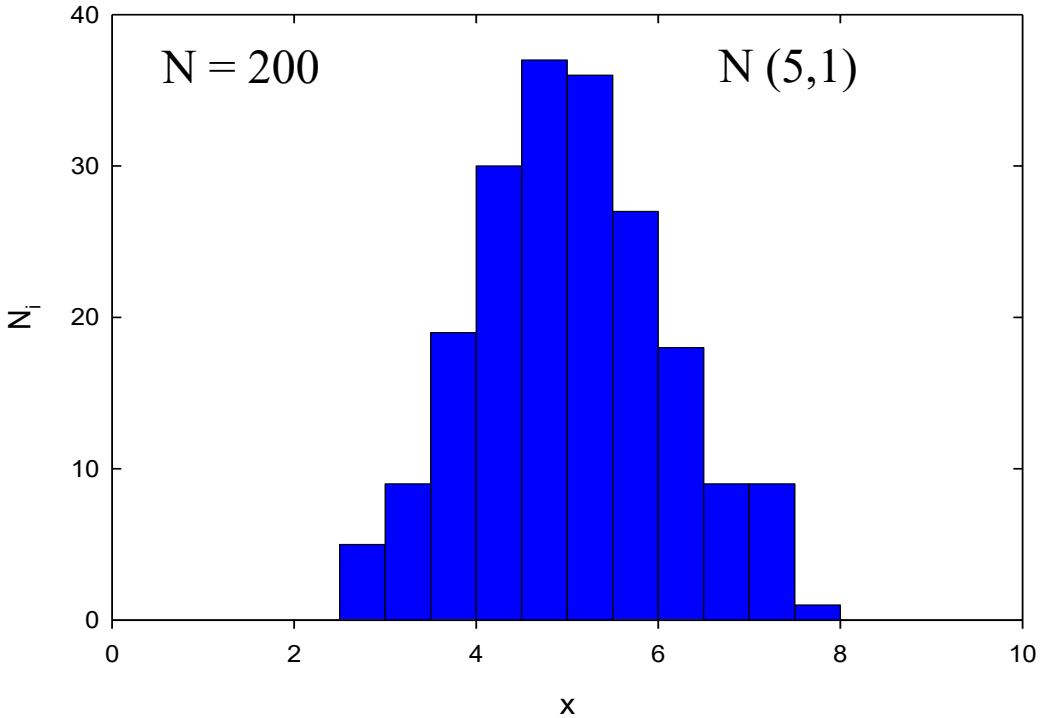
- medián: $x_{\frac{1}{2}} = 5.01$

- absolutní odchylka:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - x_{\frac{1}{2}}\right| = 0.85$$

- standardní odchylka:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 1.06$$



Míry polohy a rozptylu

- aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 0.51$

- geometrický průměr: $\bar{x}_g = \sqrt[N]{x_1 x_2 \ldots x_N} = 0.37$

- harmonický průměr: $\bar{x}_h = N\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}\right)^{-1} = 0.16$

- root mean square (rms): $\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} = 0.59$

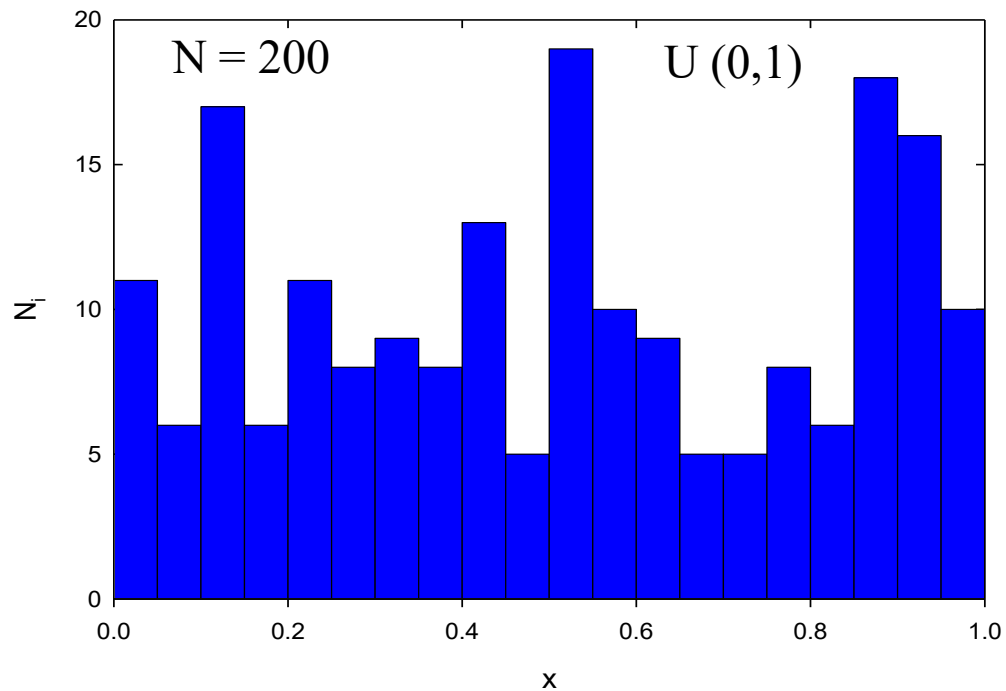
- medián: $x_{\frac{1}{2}} = 0.51$

- absolutní odchylka:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - x_{\frac{1}{2}}\right| = 0.26$$

- standardní odchylka:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0.30$$



Momenty

• operátor **střední (očekávané) hodnoty** $\mu = E[x]$

• **diskrétní** náhodná proměnná: $\mu \equiv E[x] = \sum_i x_i P_i$

• **spojitá** náhodná proměnná: $\mu \equiv E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$

• **rozptyl (variance)**: $\sigma^2 = V[x] = \mu_2' = E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2\right] - (E[x])^2$

• **standardní odchylka**: $\sigma = \sqrt{V[x]}$

***n*-tý moment:** $\mu_n = E\left[x^n\right]$

***n*-tý centrální moment:** $\mu_n' = E\left[(x-\mu)^n\right]$

• $\mu_1' = 0$ • $\mu_2' = \sigma^2$

Momenty vyšších řádů

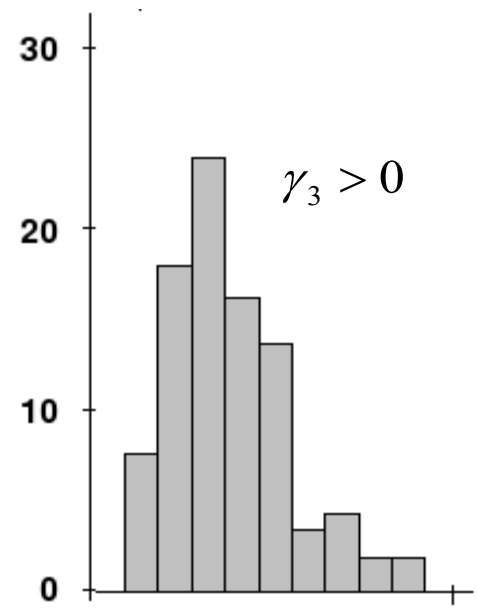
- operátor střední (očekávané) hodnoty $\mu = E[x]$
- diskrétní náhodná proměnná: $\mu \equiv E[x] = \sum_i x_i P_i$
- spojitá náhodná proměnná: $\mu \equiv E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$

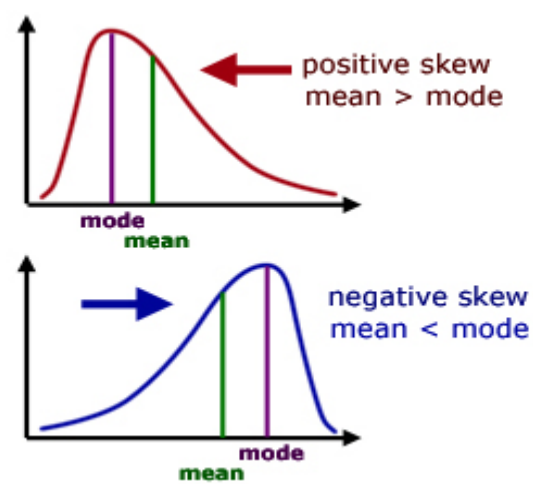
šikmost (skewness): $\gamma_3 = \frac{\mu_3'}{\sigma^3} = \frac{E\left[(x-\mu)^3\right]}{\left(E\left[(x-\mu)^2\right]\right)^{\frac{3}{2}}}$

špičatost (kurtosis): $\gamma_4 = \frac{\mu_4'}{\sigma^4} = \frac{E\left[(x-\mu)^4\right]}{\left(E\left[(x-\mu)^2\right]\right)^{2}}$

normální rozdělení: $\gamma_4 = 3$

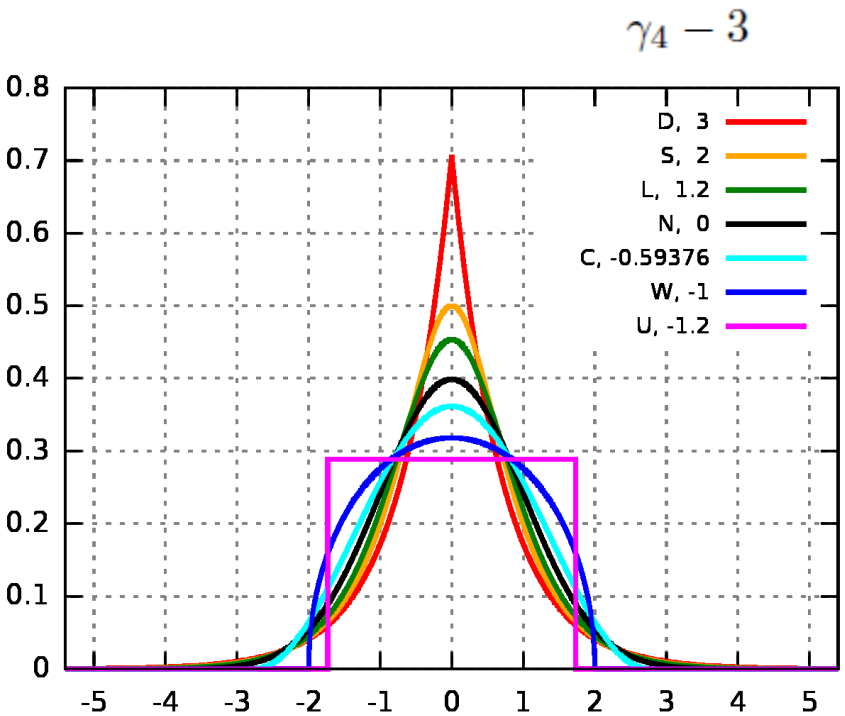
dodatečná (excesivní) špičatost: $\gamma_4 - 3$

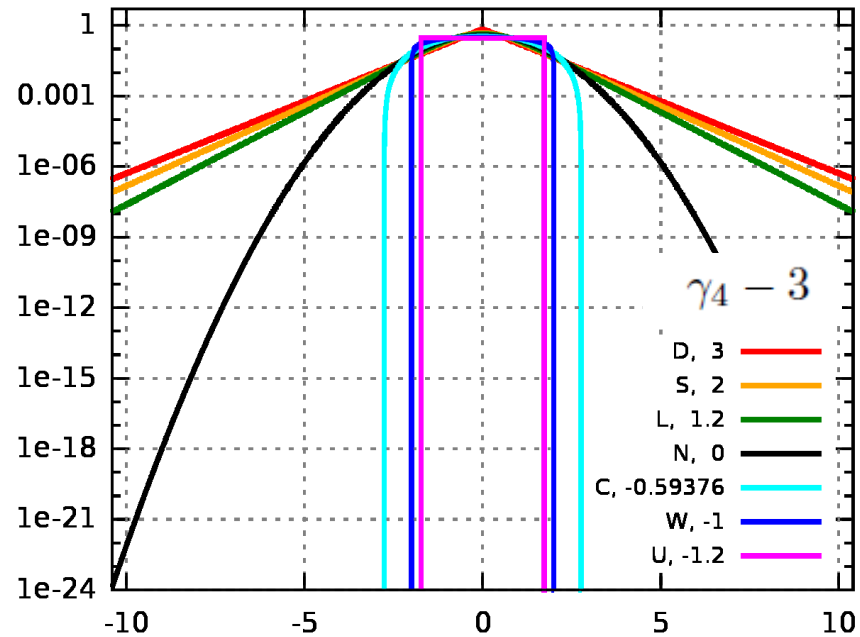




Špičatost

špičatost (kurtosis): $\gamma_4 = \frac{\mu_4'}{\sigma^4} = \frac{E\left[(x-\mu)^4\right]}{\left(E\left[(x-\mu)^2\right]\right)^2}$

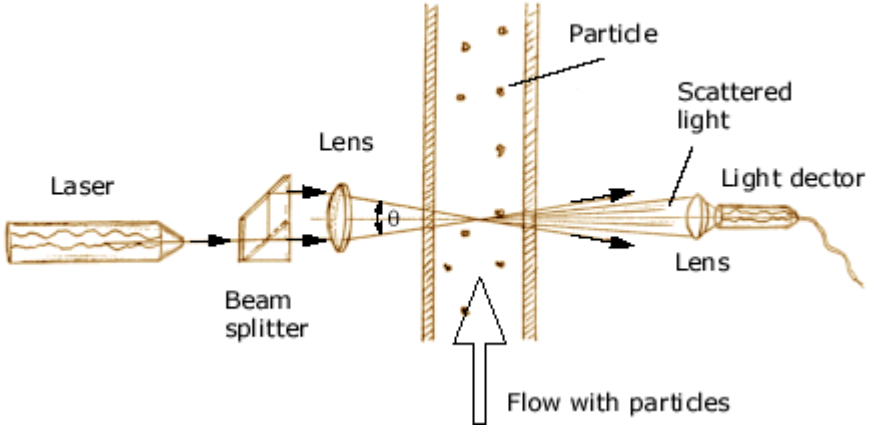


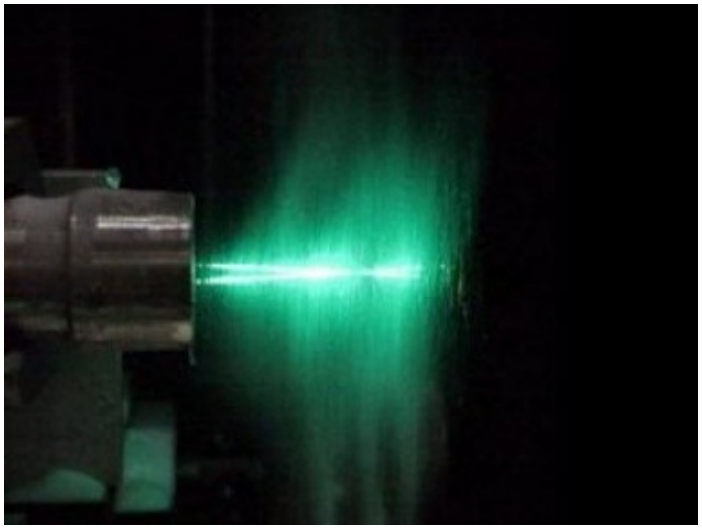


https://en.wikipedia.org/wiki/Kurtosis

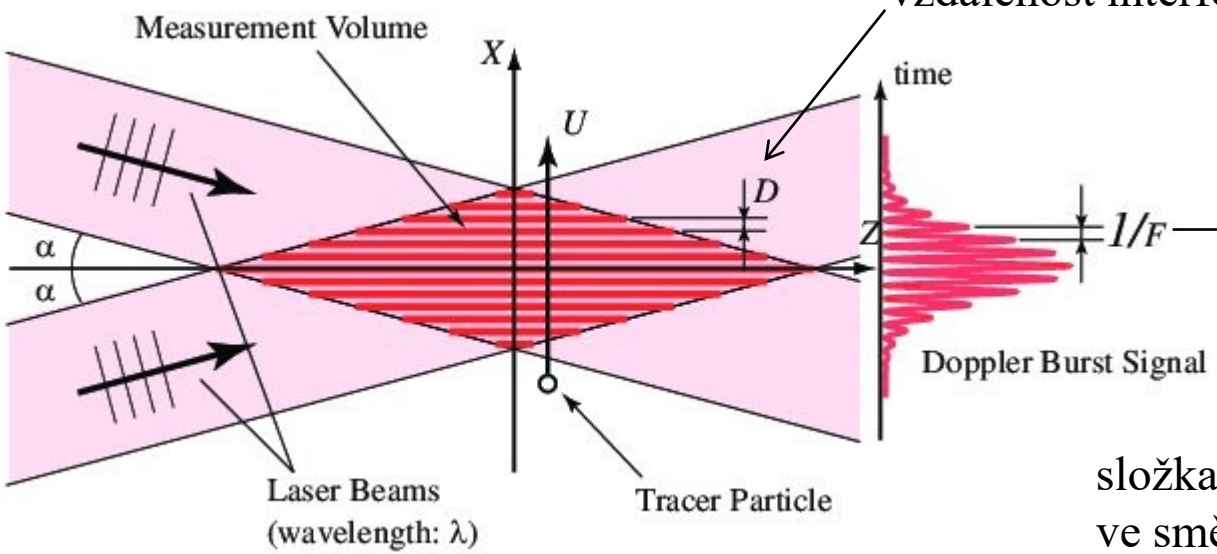
Příklad – laserová Dopplerovská anemometrie

• měření rychlosti částic





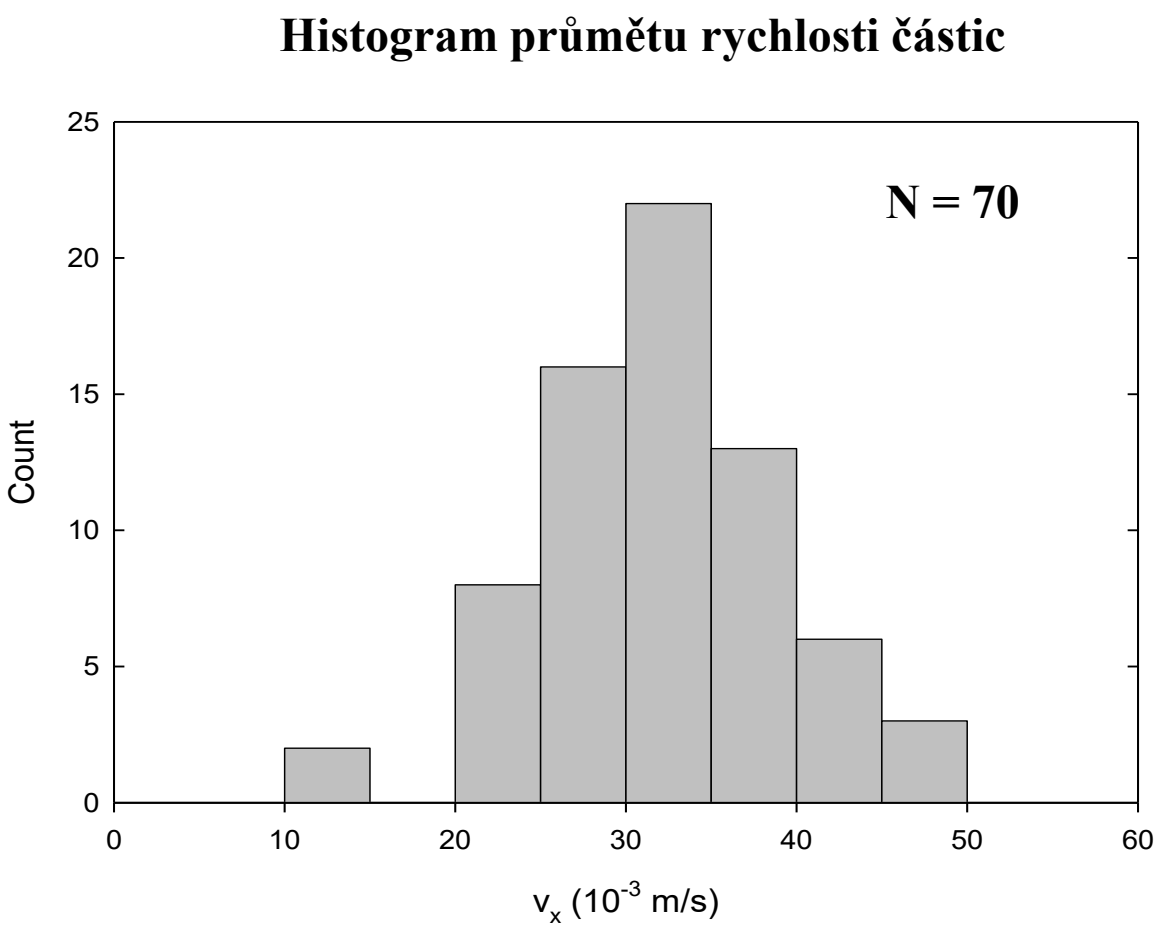
vzdálenost interferenčních proužků: $D = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha}$



změříme frekvenci F detekovaných signálů

složka rychlosti částice ve směru kolmo na proužky $v_x = \dfrac{\lambda_0}{2\sin\alpha} F$

Příklad – laserová Dopplerovská anemometrie



Příklad – laserová Dopplerovská anemometrie

částice „ideálního plynu“

hmotnost částice

Maxwell-Boltzmanovo rozdělení $$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]$$

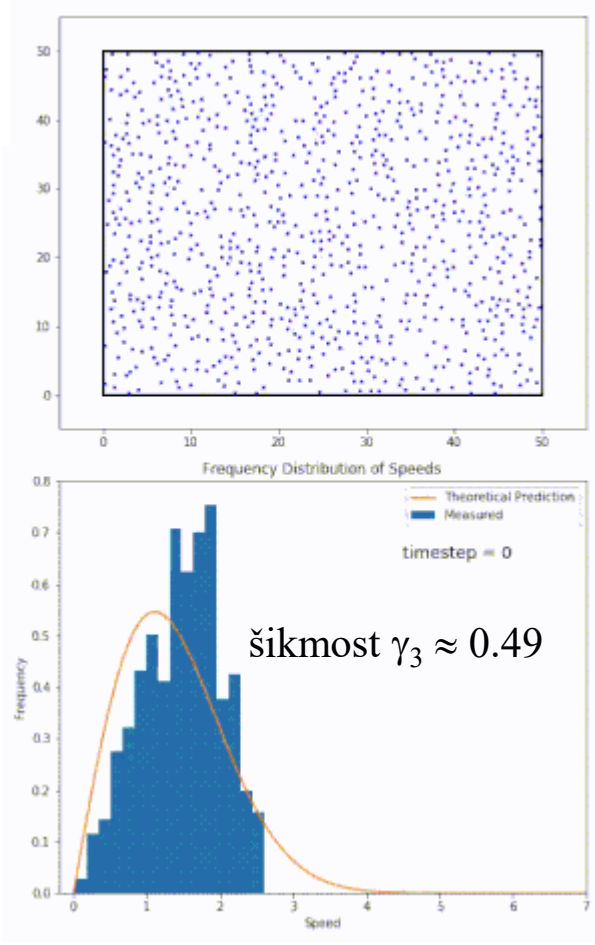
Boltzmannova konstanta *teplota*

To je ale rozdělení velikostí rychlostí $$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Složky rychlostí v_i mají normální rozdělení

$$f(v_i) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left[\frac{-mv_i^2}{2kT}\right]$$

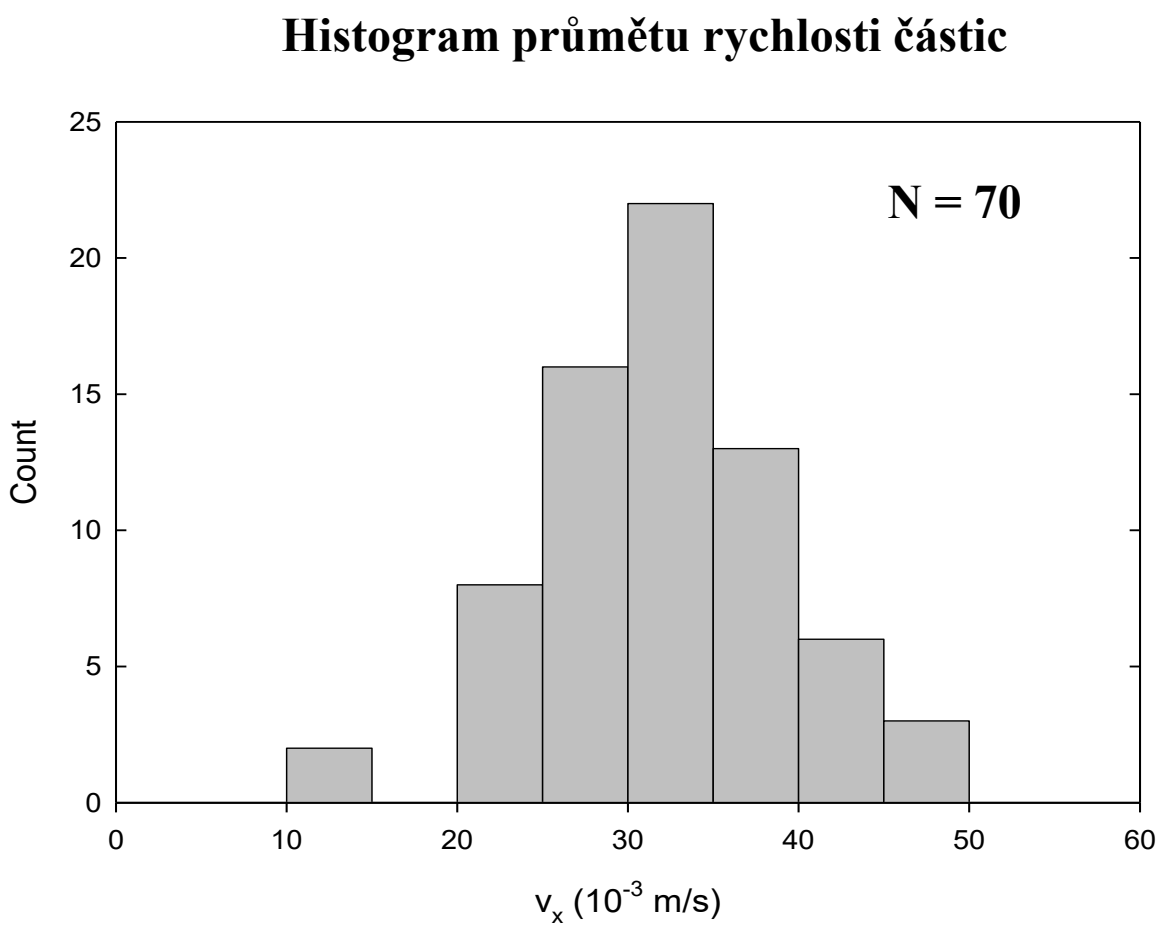
šikmost $\gamma_3 = 0$



šikmost $\gamma_3 \approx 0.49$

https://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Boltzmann_distribution

Příklad – laserová Dopplerovská anemometrie



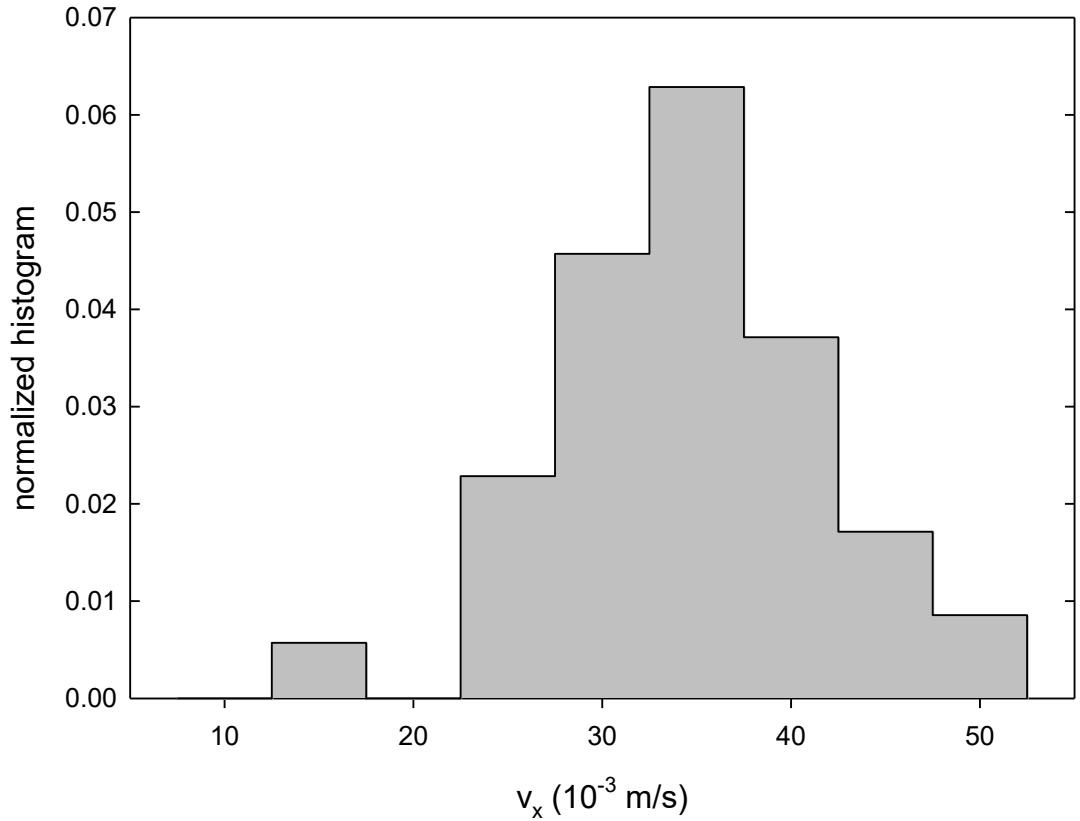
Je to normální rozdělení?

Je šikmost nulová?

Je dodatečná špičatost nulová?

Příklad - Dopplerovská anemometrie

- odhad očekávané hodnoty: $\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = (32.5 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
- odhad standardní odchylky: $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} = (6.7 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$



Má normální rozdělení?

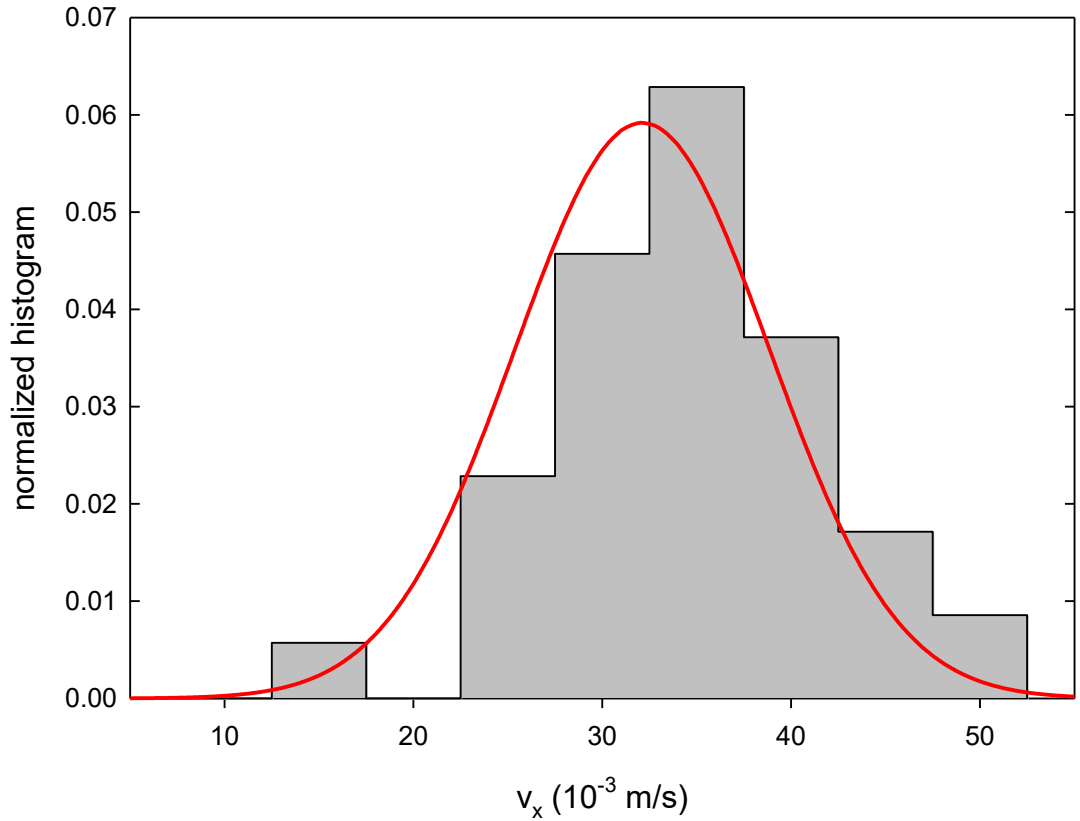
Je šikmost nulová?

Je dodatečná špičatost nulová?

Příklad - Dopplerovská anemometrie

- odhad očekávané hodnoty: $\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = (32.5 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- odhad standardní odchylky: $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} = (6.7 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$



Má normální rozdělení?

Je šikmost nulová?

Je dodatečná špičatost nulová?

Gaussián

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right]$$

Příklad - Dopplerovská anemometrie

- odhad očekávané hodnoty: $\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = (32.5 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- odhad standardní odchylky: $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} = (6.7 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- odhad šikmosti: $\hat{\gamma}_3 = \frac{\hat{\mu'}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^3}{\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right]^{3/2}} = -0.16$ (Fisher-Pearson)

- odhad šikmosti: $\hat{\gamma}_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)}\frac{\hat{\mu}'_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\sqrt{N(N-1)}}{N-2}\frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^3}{\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right]^{3/2}} = -0.17$

(korigovaný Fisher-Pearson)

- odhad chyby odhadu šikmosti: $\sigma_{skew} = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}} \approx \sqrt{\frac{6}{N}} = 0.3$

výsledný odhad šikmosti: $\hat{\gamma}_3 = -0.2 \pm 0.3$

Příklad - Dopplerovská anemometrie

- odhad očekávané hodnoty: $\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = (32.5 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- odhad standardní odchylky: $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} = (6.7 \times 10^{-3})\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

- odhad dodatečné špičatosti: $\hat{\gamma}_4 - 3 = \frac{\hat{\mu}'_4}{\hat{\sigma}^4} - 3 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^4}{\left[\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right]^2} = 0.07$ (předpojatý)

$$\hat{\gamma}_4 - 3 = \frac{(N+1)N(N-1)}{(N-2)(N-3)} \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^4}{\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right]^2} - 3\frac{(N-1)^2}{(N-2)(N-3)} = 0.26$$

(nepředpojatý pro normální rozdělení)

- odhad chyby odhadu dodatečné špičatosti: $\hat{\sigma}_{kurt} = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}} = 0.56$

  pro velká N: $\hat{\sigma}_{kurt} \approx 2\sqrt{\frac{6}{N}} = 0.59$

výsledný odhad dodatečné špičatosti: $\hat{\gamma}_4 - 3 = 0.3 \pm 0.6$