Metody zpracování fyzikálních měření

Jakub Čížek – katedra fyziky nízkých teplot
Tel: 221 912 788
jakub.cizek@mff.cuni.cz

http://physics.mff.cuni.cz/kfnt/vyuka/metody/index.html

Doporučená literatura:

• D.S. Silva, “Data Analysis A Bayesian Tutorial” (Claredon Press, Oxford, 1998)

• W.T. Eadie *et al.*, “Statistical Methods in Experimental Physics” (North Holland, Amsterdam, 1971)

• G. Cowan, “Statistical Data Analysis” (Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford 1998)

• R.J. Barlow, “Statistics. A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences” (John Wiley & Sons, Chichester 1989)

• J. Štěpán, „Teorie pravděpodobnosti“ (Academia, Praha,1987)

Jevy

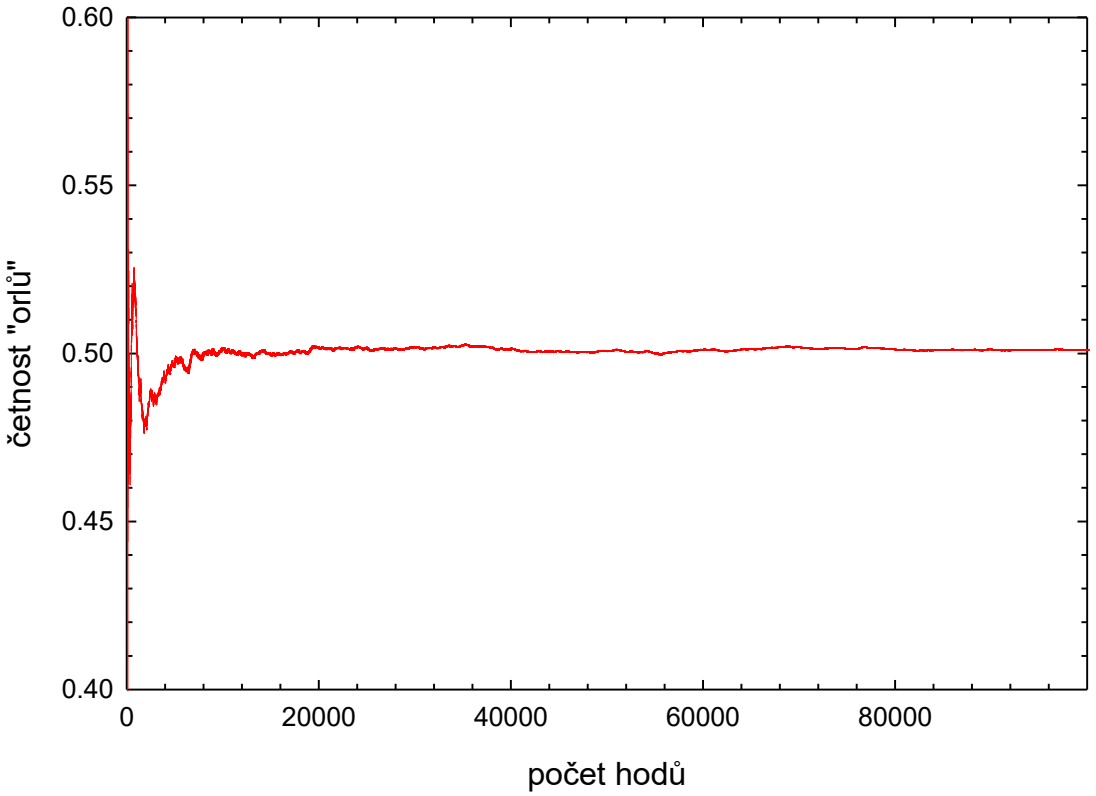
výsledky opakovaných měření nebo pozorování

- výsledek ω – elementární jev (elementární událost)
- prostor jevů (prostor událostí) Ω , $\omega \in \Omega$
- $A \subset \Omega$, jev (událost)
- $\omega \in A$ – výsledek *příznivý* jevu A

1. Hod korunou

$$\Omega \equiv \{p, o\}$$

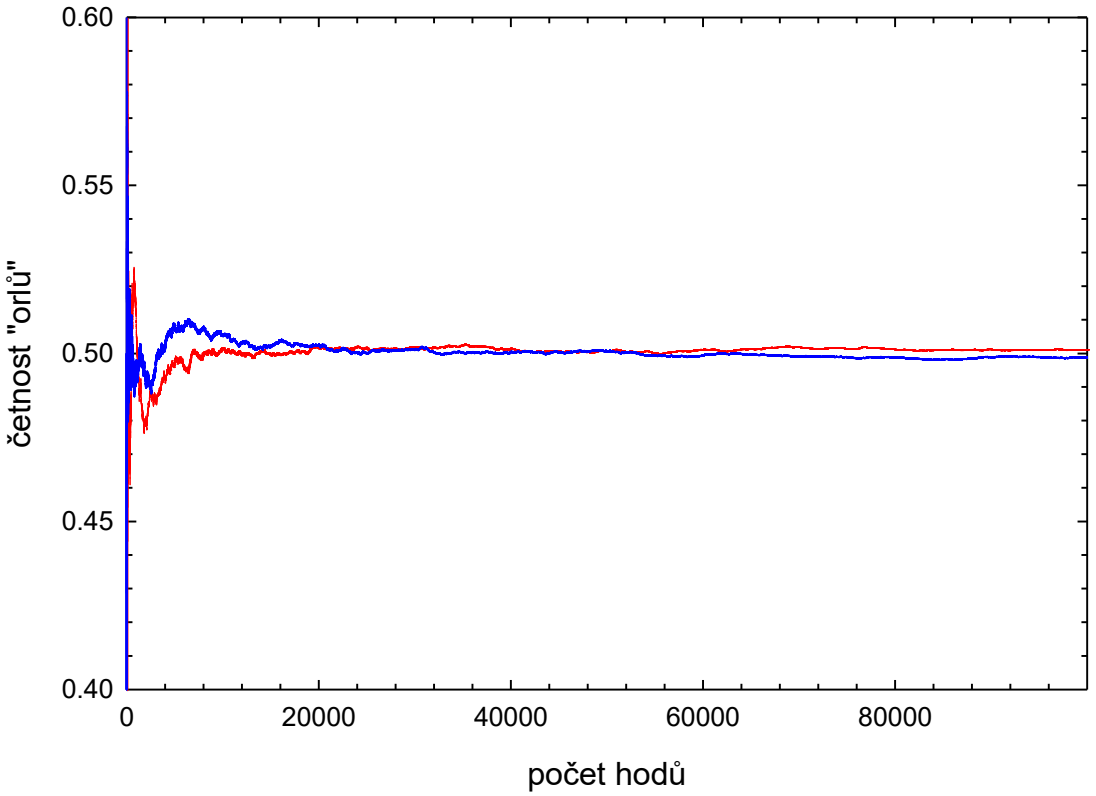
o p o p p o o p p p o p p p o o o o o o .....



1. Hod korunou

$\Omega \equiv \{p, o\}$

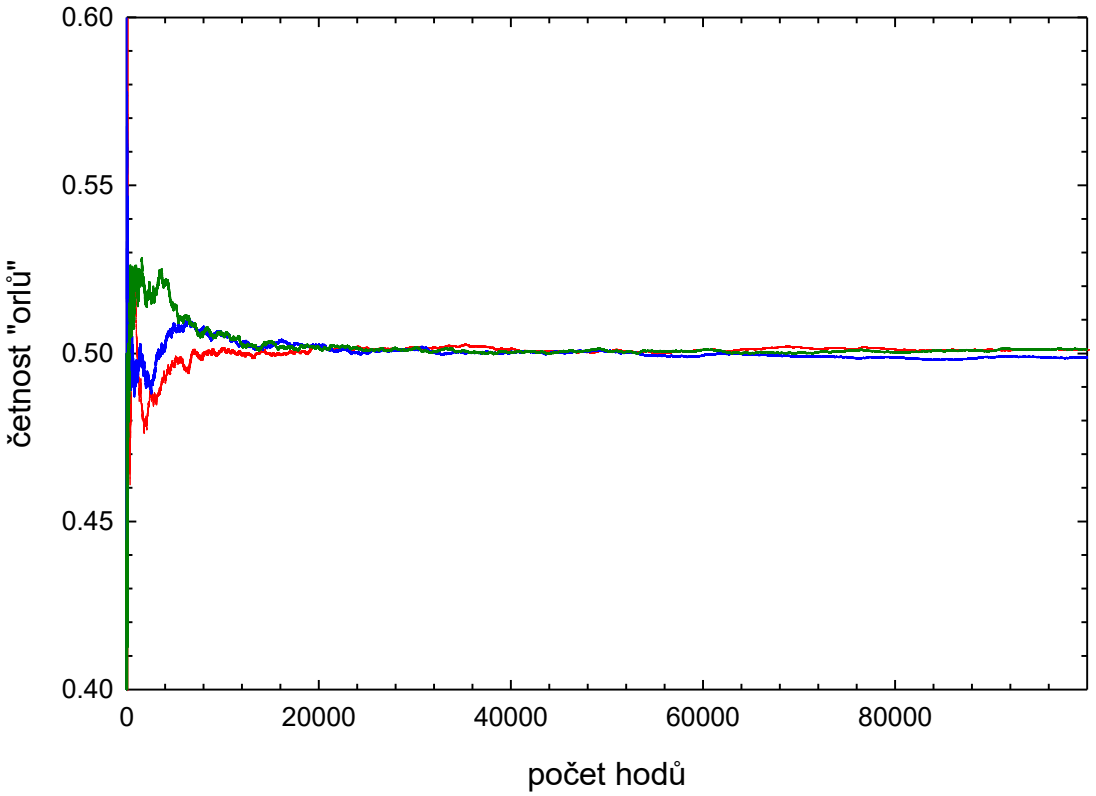
o p o p p o o p p p o p p p o o o o o o .....



1. Hod korunou

$$\Omega \equiv \{p, o\}$$

o p o p p o o p p p o p p p o o o o o o .....



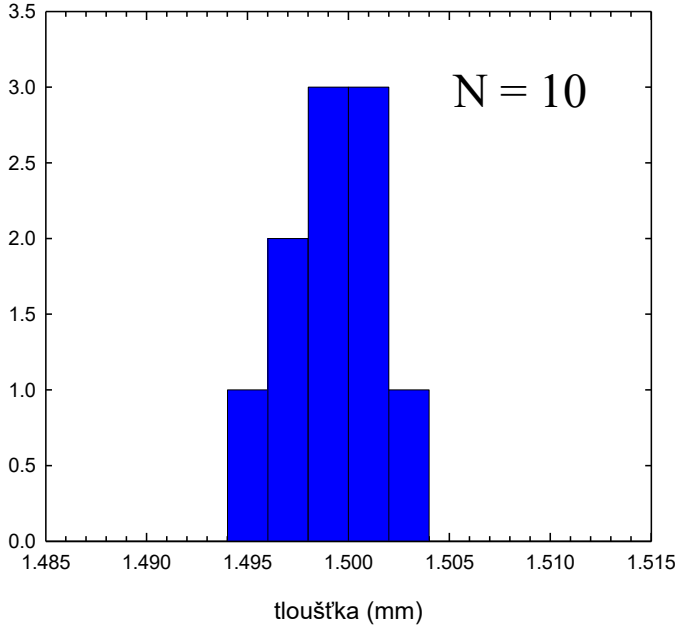
2. Měření tloušťky vzorku

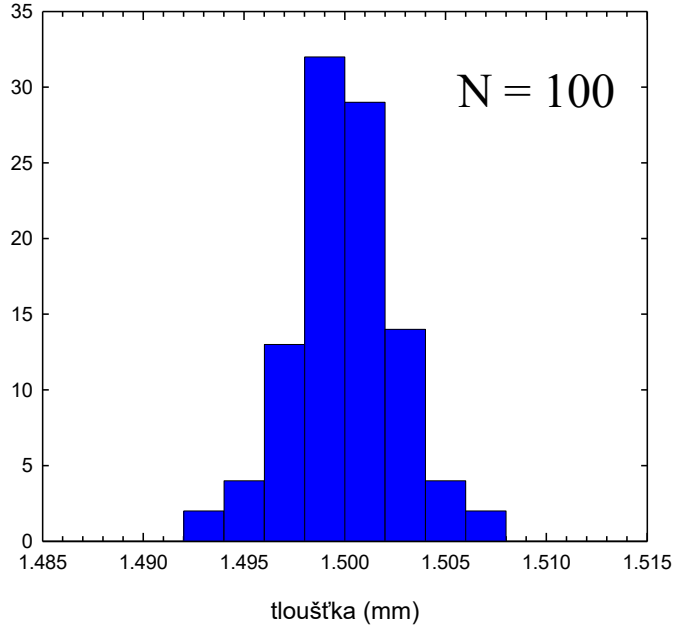
$\Omega = \mathbf{R}$

1.500 1.5001 1.500 1.503 1.498 1.504 1.498 1.496 1.503 1.502 ……

vzorek: $d = 1.5$ mm

- mikrometrem: $\sigma = 0.005$ mm





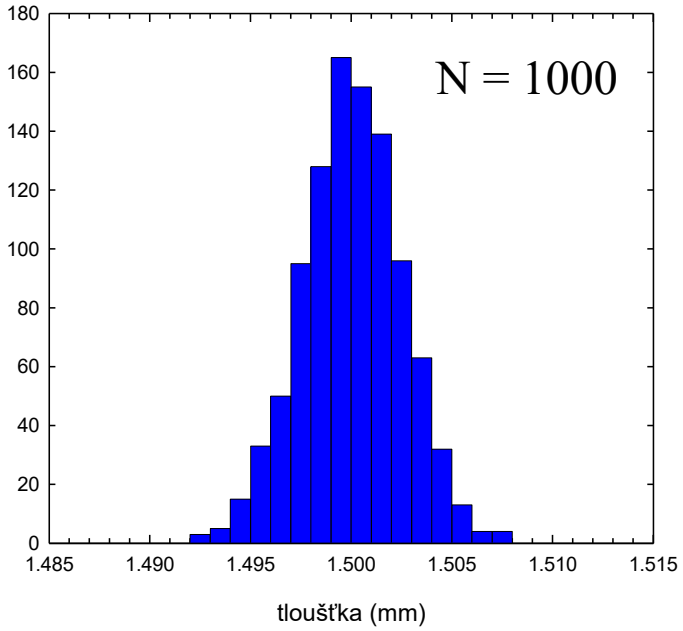
2. Měření tloušťky vzorku

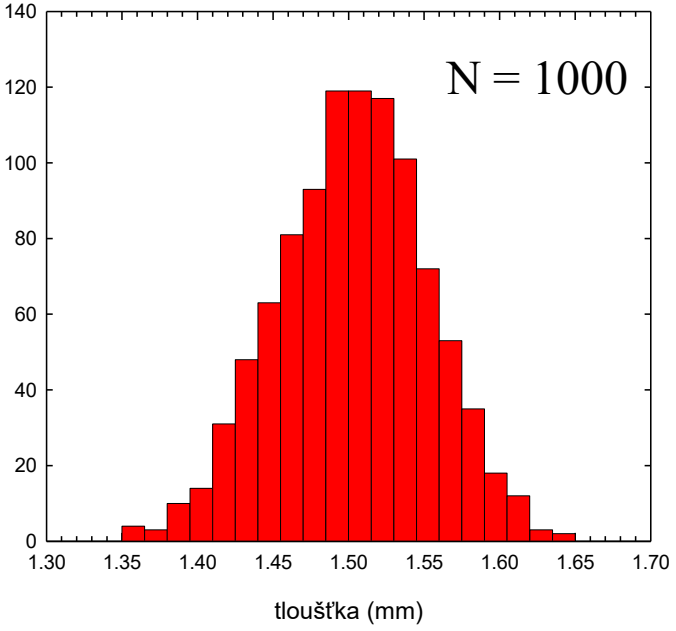
$\Omega = \mathbf{R}$

1.500 1.5001 1.500 1.503 1.498 1.504 1.498 1.496 1.503 1.502 .....

vzorek: $d = 1.5$ mm

- mikrometrem: $\sigma = 0.005$ mm
- šuplerou: $\sigma = 0.05$ mm

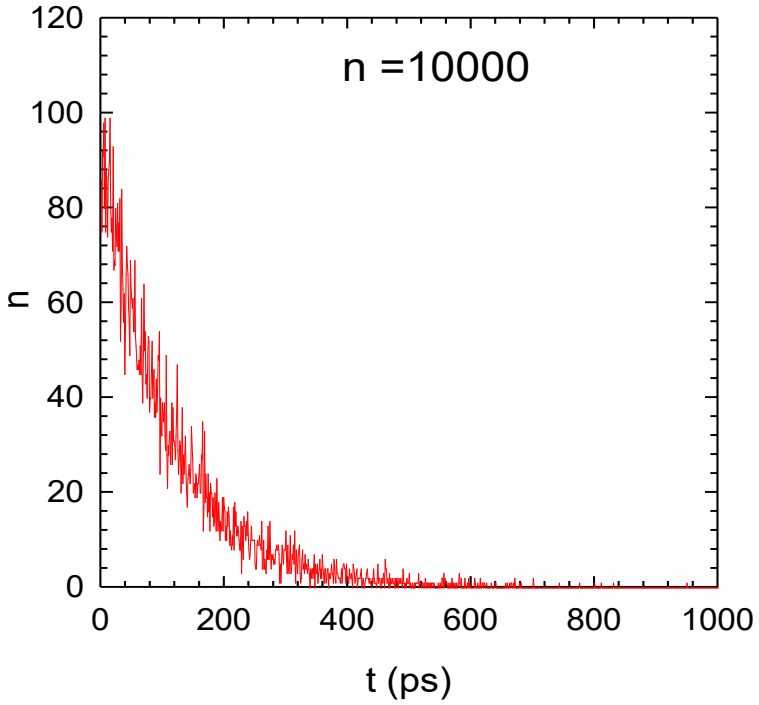


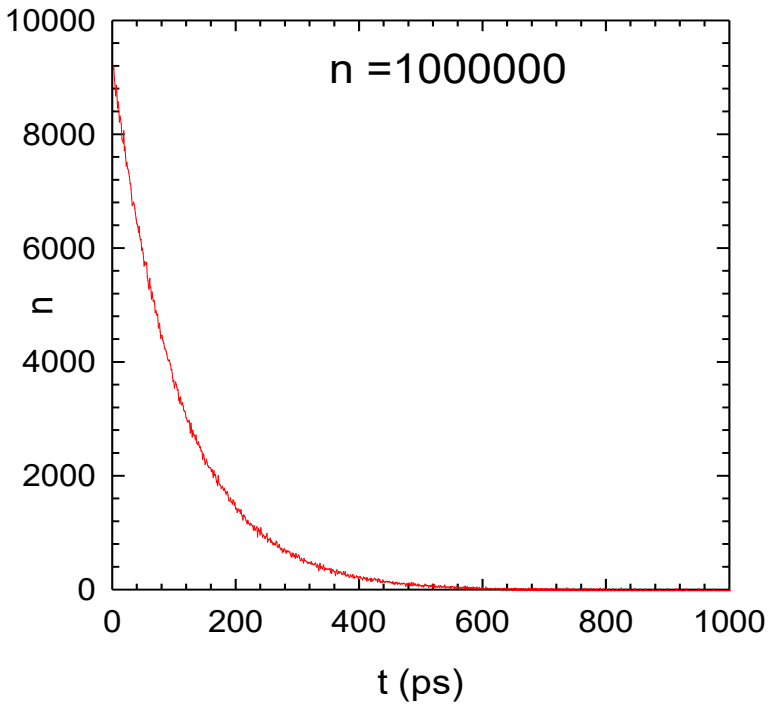


3. Měření doby života pozitronu v Fe:

$\Omega = \mathbf{R}$

```
56.39 13.72 20.66 60.94 248.11 155.32 258.46 16.96 33.55 44.69
78.40 23.49 209.56 35.42 165.92 67.80 156.41 83.27 104.58 64.81
.....
```





Pravděpodobnost - Kolmogorovy axiomy

Nechť Ω je prostor jevů pro daný experiment. Potom **pravděpodobnost P** je každé zobrazení množiny všech podmnožin množiny Ω do množiny reálných čísel, které splňuje následující podmínky:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$
3. $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Některé vlastnosti pravděpodobnosti:

(i) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$

(ii) $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$, kde $\overline{\mathrm{A}}$ je doplnek množiny A

(iii) $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$

(iv) $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{B})$

(v) $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

Náhodná proměnná

Přiřazení reálného čísla výsledku experimentu (zobrazení)

- **diskrétní náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky lze seřadit do posloupnosti $x_1, x_2, \ldots x_N$

  - *konečná* diskrétní náhodná proměnná: N je přirozené číslo

    Příklad: házení kostkou – $\{1,2,3,4,5,6\}$

  - *nekonečná* diskrétní náhodná proměnná: N je nekonečno

    Příklad: počet rozpadů radioaktivního zářiče za jednotku času – $\{0,1,2,3,....\}$

- **spojitá náhodná proměnná**

  všechny možné výsledky tvoří nespočetnou množinu

  Příklad: měření hmotnosti vzorku – výsledek může být jakékoli kladné reálné číslo

Hustota pravděpodobnosti, distribuční funkce

diskrétní náhodná proměnná

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N\}$ konečná

$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ nekonečná

$P(x = x_i) \equiv P_i$ pst. že nastane výsledek x_i

nornalizační podmínka

$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$ konečná

$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ nekonečná

spojitá náhodná proměnná

Ω nespočetná

$P(x \in \langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x \rangle) \equiv f(x_0)\mathrm{d}x$

pst. že nastane výsledek padne do intervalu $\langle x_0, x_0 + \mathrm{d}x \rangle$

$f(x)$ **hustota pravděpodobnosti**

$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ **distribuční funkce**

$P(x \in \langle a, b \rangle) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

normalizační podmínka: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Pravděpodobnostní míra: příklad – $n \times$ házení korunou

- diskrétní náhodná proměnná
- prostor jevů Ω : n-tice $(a_1, a_2,..,a_n)$, a_i = p, o
- 2^n možností
- počet jevů: 2^{2^n}
- pravděpodobnost

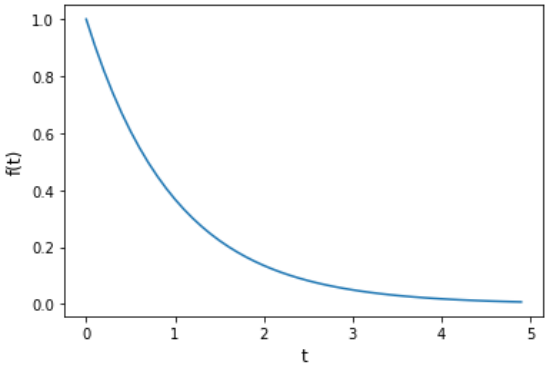
$$P(\varnothing) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(\text{p, o, o, p,..., o}) = \frac{1}{2^n}$$

- pravděpodobnost, že nejpozději ve čtvrtém pokusu mi padne panna
- doplněk (o, o, o, o, x, x,..., x) : $P(\overline{A}) = \frac{2^{n-4}}{2^n} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{16}$

Pravděpodobnostní míra: příklad – měření doby života pozitronů

- spojitá náhodná proměnná
- prostor jevů Ω : množina nezáporných reálných čísel $\mathbf{R}^+$
- nespočetně mnoho možností
- pravděpodobnost, že doba života padne do intervalu $\langle t_0, t_0 + dt \rangle$

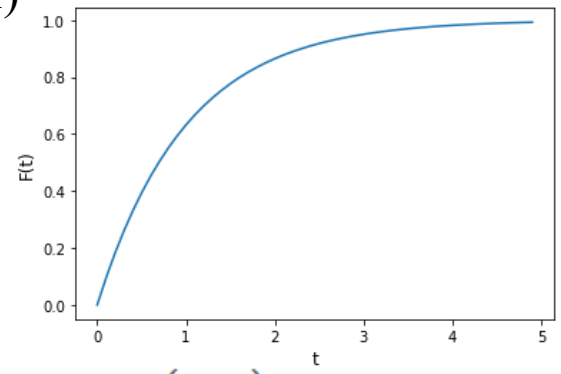


$$P\left(t \in \langle t_0, t_0 + dt \rangle\right) = f(t_0|\tau)\, dt = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) dt$$

hustota pravděpodobnosti $f(t|\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

(zde exponenciální rozdělení)

- pravděpodobnost, že doba života padne do intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$



$$P\left(t \in \langle t_1, t_2 \rangle\right) = \int_{t_1}^{t_2} f(t|\tau)\, dt = F_\tau(t_2) - F_\tau(t_1)$$

distribuční funkce $F_\tau = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Pravděpodobnost – klasická definice pravděpodobnosti

Klasická definice pravděpodobnosti – limita relativních četností jevu A

- opakujeme N – krát experiment
- N_A – počet výsledků, kdy nastal jev A
- **relativní četnost** jevu A : $X_A = \frac{N_A}{N}$

pravděpodobnost jevu A: $\mathrm{P}(A) = \lim_{N \to \infty} X_A$

- je nutné mít možnost experiment mnohokrát opakovat

Pravděpodobnost: Bayesovský přístup

pravděpodobnost – stupeň víry v platnost dané hypotézy

- subjektivní - závisí na pozorovateli
- podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- všechny pravděpodobnosti jsou podmíněné $P(A \mid I)$

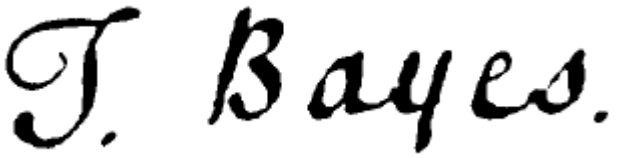
implicitní (apriorní) znalost pozorovatele

Podmíněná pravděpodobnost: Bayesův teorém

Bayesův teorém

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes
1702? – 1761



Podmíněná pravděpodobnost: Bayesův teorém

Divine Benevolence:

Or, An ATTEMPT to prove that the

PRINCIPAL END

Of the DIVINE

PROVIDENCE *and* GOVERNMENT

IS THE

Happineſs of his Creatures.

BEING

An ANSWER to a Pamphlet, entitled, *Divine Rectitude*; or, *An Inquiry concerning the Moral Perfections of the Deity.*

WITH

A Refutation of the Notions therein advanced concerning Beauty and Order, the Reaſon of Puniſhment, and the Neceſſity of a State of Trial antecedent to perfect Happineſs.

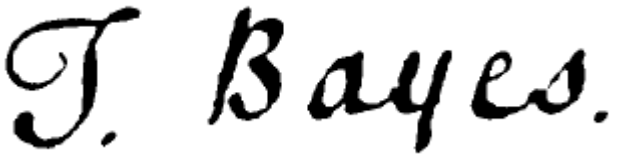
LONDON:

Printed for JOHN NOON, at the *White-Hart* in *Cheapſide*, near *Mercers-Chapel*. MDCCXXXI.

[Price One Shilling.]

publikáno 1731

Thomas Bayes
1702? – 1761

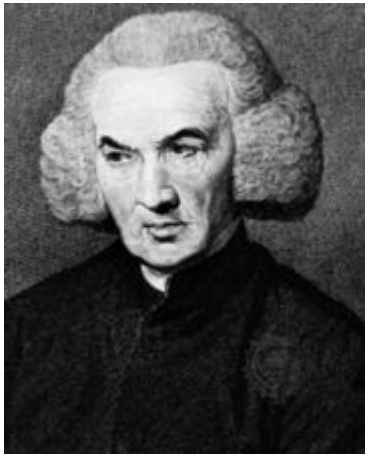


Podmíněná pravděpodobnost: Bayesův teorém

Bayesův teorém

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

The purpose I mean is, to shew what reason we have for believing that there are in the constitution of things fixt laws according to which things happen, and that, therefore, the frame of the world must be the effect of the wisdom and power of an intelligent cause; and thus to confirm the argument taken from final causes for the existence of the Deity. It will be easy to see that the converse problem solved in this essay is more directly applicable to this purpose; for it shews us, with distinctness and precision, in every case of any particular order or recurrency of events, what reason there is to think that such recurrency or order is derived from stable causes or regulations in nature, and not from any irregularities of chance. - Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1763



Richard Price
1723-1791

Thomas Bayes
1702? – 1761

"An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances"
Reverend Thomas Bayes *(Philosophical Transactions of the Royal Society, Volume 53, pages 370-418, 1763)*

Podmíněná pravděpodobnost: Bayesův teorém

LII. *An Eſſay towards ſolving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr.* Bayes, *F. R. S. communicated by Mr.* Price, *in a Letter to* John Canton, *A. M. F. R. S.*

Dear Sir,

Read Dec. 23, 1763. I Now ſend you an eſſay which I have found among the papers of our deceaſed friend Mr. Bayes, and which, in my opinion, has great merit, and well deſerves to be preſerved. Experimental philoſophy, you will find, is nearly intereſted in the ſubject of it; and on this account there ſeems to be particular reaſon for thinking that a communication of it to the Royal Society cannot be improper.

He had, you know, the honour of being a member of that illuſtrious Society, and was much eſteemed by many in it as a very able mathematician. In an introduction which he has writ to this Eſſay, he ſays, that his deſign at firſt in thinking on the ſubject of it was, to find out a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumſtances, upon ſuppoſition that we know nothing concerning it but that, under the ſame circum-

The Royal Society is collaborating with JSTOR to digitize, preserve, and extend access to *Philosophical Transactions (1683-1775)*. www.jstor.org

Thomas Bayes
1702? – 1761

Philosophical Transactions of the Royal Society, Volume 53, pages 370-418, 1763

Bayesovská interpretace pravděpodobnosti

Bayesův teorém

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(Teorie \mid Data) = \frac{P(Data \mid Teorie)P(Teorie)}{P(Data)}$$

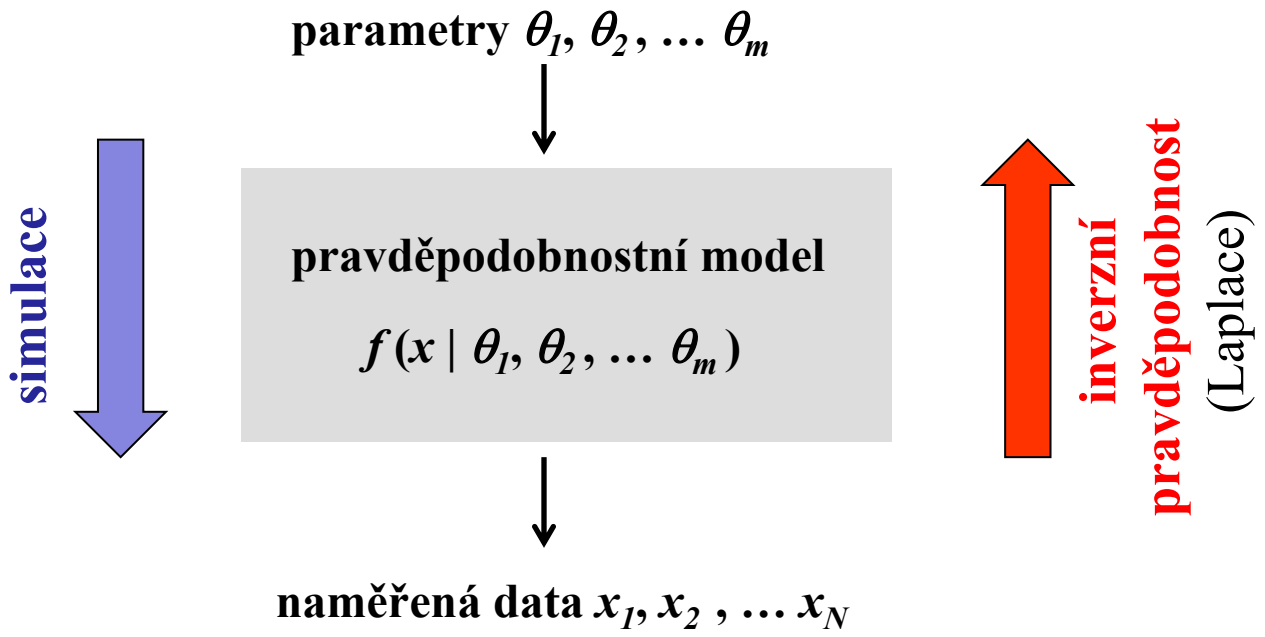
posteriorní pravděpodobnost

věrohodnost

apriorní pravděpodobnost

Pierre-Simon Laplace
1749 – 1827

P. S. Laplace: Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812

Bayesovská interpretace pravděpodobnosti

- Bayesovský přístup: všechny nejistoty (nekompletní informaci) popisujeme pomocí pravděpodobnosti