Střídavý proud

NFUF103-8

2020/2021 M. Rotter

Speciální případ kvazistacionárních obvodů - po dostatečně dlouhé době se ustálí proud I(t) na harmonickém průběhu s konstantní amplitudou.
Např. rezonanční obvod s vazbou pravidelně dodávající energii,
střídavý alternátor – cívka rotující v magnetickém poli

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi_1) \qquad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$I_0 = \dfrac{U_0}{Z}$ Z – **impedance** spojení rezistorů, kondenzátorů a indukčností

$N_Z = U(t).I(t)$ - okamžitý výkon zdroje (může být složitou funkcí času)

Střední hodnota za periodu τ $\omega.\tau = 2\pi$

$$\bar{N}_Z = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(t).I(t)\,dt = \frac{U_0 I_0}{\tau}\int_0^\tau \cos(\omega t + \phi_1)\cos(\omega t + \phi_2)\,dt$$

$$\bar{N}_Z = \frac{U_0 I_0}{\tau}\int_0^\tau (\cos\omega t\cos\phi_1 - \sin\omega t\sin\phi_1)(\cos\omega t\cos\phi_2 - \sin\omega t\sin\phi_2)\,dt$$

$$\bar{N}_Z = \frac{U_0 I_0}{\tau}\left[\cos\phi_1\cos\phi_2\int_0^\tau \cos^2\omega t dt + \sin\phi_1\sin\phi_2\int_0^\tau \sin^2\omega t dt - \cos\phi_1\sin\phi_2\int_0^\tau \cos\omega t\sin\omega t dt - \sin\phi_1\cos\phi_2\int_0^\tau \cos\omega t\sin\omega t dt\right]$$

platí $\int_0^\tau \cos^2\omega t dt = \dfrac{\tau}{2} = \int_0^\tau \sin^2\omega t dt \qquad \int_0^\tau \cos\omega t\sin\omega t dt = 0$

$$\bar{N}_Z = \frac{U_0 I_0}{\tau}\left(\frac{\tau}{2}\cos\phi_1\cos\phi_2 + \frac{\tau}{2}\sin\phi_1\sin\phi_2\right) \qquad \boxed{\rightarrow \bar{N}_Z = \frac{U_0 I_0}{2}\cos|\phi_2 - \phi_1|}$$

Zavedeme efektivní hodnoty napětí a proudu $U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ $I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ $\bar{N}_Z = U_{ef} I_{ef} \cos|\phi_1 - \phi_2|$

Výkon střídavého proudu závisí na fázovém posunu napětí a proudu $\cos|\phi_2 - \phi_1|$ - se nazývá **účiník**

= 1 činný výkon

= 0 jalový výkon

Spád napětí na prvcích obvodu:

rezistor

$$U_R = R.I_0 \cos(\omega t + \phi_2) \qquad U_0 = RI_0 \qquad \phi_1 = \phi_2$$ (napětí je ve fázi s proudem)

R - rezistance

cívka napětí na cívce $U_L = l \frac{dI}{dt}$

$$U_L = L \frac{d}{dt}\left(I_0 \cos(\omega t + \phi_2)\right) = -\omega L I_0 \sin(\omega t + \phi_2) = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \phi_2 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad U_0 = \omega L I_0 \qquad \phi_1 = \phi_2 + \frac{\pi}{2}$$

(napětí o π/2 předchází proud)

ωL - induktance

kondenzátor napětí na kondenzátoru $U_C = \frac{Q}{C}$

$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t I_0 \cos(\omega t + \phi_2)\, dt = \frac{1}{\omega C} I_0 \sin(\omega t + \phi_2) = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos\left(\omega t + \phi_2 - \frac{\pi}{2}\right) \qquad U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 \qquad \phi_1 = \phi_2 - \frac{\pi}{2}$$

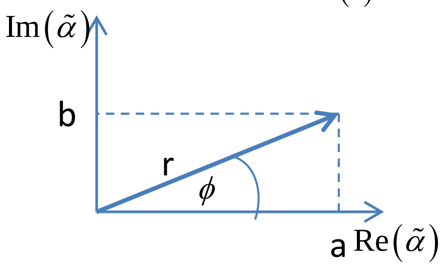
(proud o π/2 předbíhá napětí)

$\frac{1}{\omega C}$ - kapacitance

Komplexní symbolika střídavého napětí a proudu

Vyjádření střídavých napětí a proudů pomocí komplexních veličin umožní názorné analýzy sítí střídavých proudů. Měřitelné veličiny se získají jako reálné části výsledků řešení, snadno se vyjádří fázové posuny reálných impedancí.

$$\tilde{F}(t) = e^{i(\omega t+\phi)} = \cos(\omega t+\phi) + i.\sin(\omega t+\phi)$$



Vyjádření v Gaussově rovině

$$\tilde{\alpha} = a + i.b = r.e^{i\phi} = r(\cos\phi + i.\sin\phi)$$

r – modul, *φ* – argument komplexního čísla

absolutní hodnota $|\tilde{\alpha}| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad i^2 = -1 \qquad \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i.\frac{1}{\sqrt{2}}$

Komplexní zápis napětí a proudu $\tilde{U} = U_0 e^{i(\omega t+\phi)} = \tilde{U}_0 e^{i\omega t} \qquad U(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{U}$

$$\tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t+\phi_2)} = \tilde{I}_0 e^{i\omega t} \qquad I(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{I}$$

Umožní oddělit časovou závislost veličin a pracovat jen s komplexními amplitudami (stacionárními)

$$\tilde{U}_L = L\frac{d\tilde{I}}{dt} = i\omega L\tilde{I} = i\omega L I_0 e^{i(\omega t+\phi_2)} \qquad \boxed{\rightarrow \tilde{U}_{L0} = i\omega L\tilde{I}_0} \qquad \boxed{\tilde{U}_{R0} = R.\tilde{I}_0} \qquad \boxed{\tilde{U}_{C0} = \frac{1}{i\omega C}\tilde{I}_0}$$

Zobecněný Ohmův zákon

$$\boxed{\tilde{U}_0 = \tilde{Z}.\tilde{I}_0}$$

$\tilde{Z} = Z.e^{i\phi}$ - komplexní impedance

Pro některé obvody je vhodnější použití **admitance** $\tilde{Y} = Y.e^{i\phi'} = \frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-i\phi}$

$$\boxed{\tilde{I} = \tilde{Y}.\tilde{U}}$$

	$\tilde{Z}$	ϕ	Y	ϕ'
rezistor	R	0	$\frac{1}{R}$	0
kondenzátor	$\frac{1}{i\omega C}$	$-\frac{\pi}{2}$	$i\omega C$	$\frac{\pi}{2}$
cívka	$i\omega L$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{i\omega L}$	$-\frac{\pi}{2}$

Amplituda impedance $\left|\tilde{Z}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left(\tilde{Z}\right) + \mathrm{Im}^2\left(\tilde{Z}\right)}$ fáze $tg\phi = \frac{\mathrm{Im}\left(\tilde{Z}\right)}{\mathrm{Re}\left(\tilde{Z}\right)}$

Špičková hodnota $U_0 = \left|\tilde{U}\right| = \left|\tilde{I}\right|.\left|\tilde{Z}\right| = I_0.\sqrt{\mathrm{Re}^2\left(\tilde{Z}\right) + \mathrm{Im}^2\left(\tilde{Z}\right)}$

V komplexní symbolice: I. Kirchhoffův zákon $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \tilde{I}_k = 0$

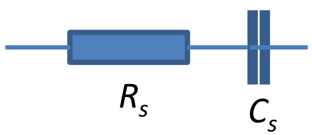
II. Kirchhoffův zákon $\sum_{j=1}^{m} \tilde{U}_j = \sum_{l=1}^{n} \tilde{Z}_k.\tilde{I}_k$

Náhradní schémata reálných prvků

Skládání komplexních impedancí $\tilde{Z} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{Z}_k$ v sérii

$\tilde{Y} = \sum_{j=1}^{m} \tilde{Y}_j$ paralelně

Sériová kombinace RC



$$\tilde{Z}_s = R_s - \frac{i}{\omega C_s}$$

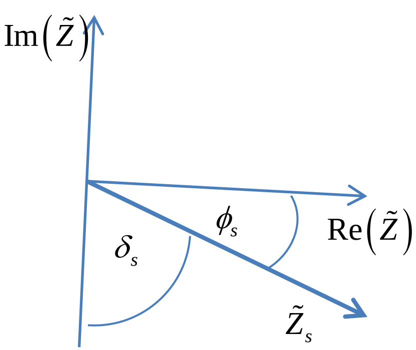
absolutní hodnota $\left|\tilde{Z}_s\right| = \sqrt{R_s^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s^2}} = \frac{1}{\omega C_s}\sqrt{1+\omega^2 R_s^2 C_s^2}$

fázový úhel $tg\phi_s = -\frac{1}{\omega R_s C_s}$

Zavádí se ztrátový úhel $\delta_s = \frac{\pi}{2} - |\phi_s|$

$$tg\delta_s = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - |\phi_s|\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - |\phi_s|\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos|\phi_s| - \cos\frac{\pi}{2}\sin|\phi_s|}{\cos\frac{\pi}{2}\cos|\phi_s| + \sin\frac{\pi}{2}\sin|\phi_s|} = \frac{\cos|\phi_s|}{\sin\phi_s} = \frac{1}{tg|\phi_s|} = \omega R_s C_s$$

Nulový ztrátový úhel $tg\delta_s = 0$ vzniká pro $R_s = 0$ → nedochází k přeměně elektrické energie v tepelnou
- ideální kondenzátor

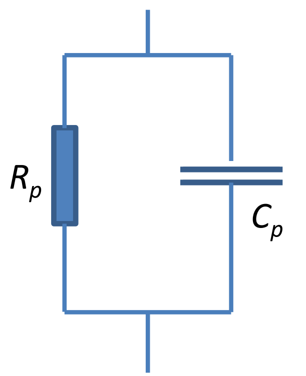


pro $\delta_s \to \frac{\pi}{2}$ blíží se k ideálnímu rezistoru

Impedance v Gaussově prostoru je zobrazena vektorem ukotveným v počátku zvaným též fázorem.

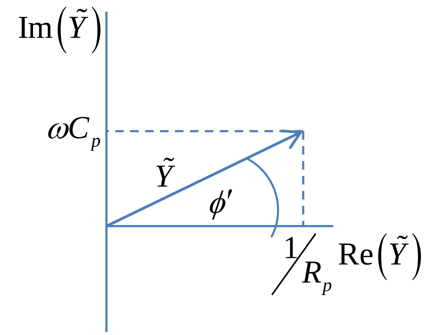
Paralelní kombinace RC

admitance zapojení $\tilde{Y} = \frac{1}{R_p} + i\omega C_p = \frac{1 + i\omega C_p R_p}{R_p}$ fázový úhel $tg\phi' = \omega C_p R_p$



absolutní hodnota impedance $\left|\tilde{Z}_p\right| = \left|\frac{1}{\tilde{Y}}\right| = R_p \left(1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2\right)^{-1/2}$

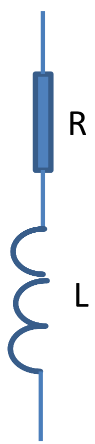
ztrátový úhel $tg\delta_p = \left(\omega C_p R_p\right)^{-1}$

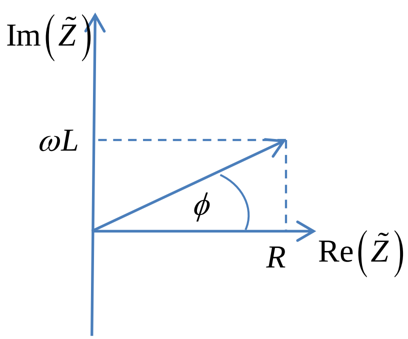


Přeměna elektrické energie na tepelnou
Je tím vyšší, čím je menší R_p

Náhradní schéma se volí podle charakteru reálného kondenzátoru

Sériová kombinace RL





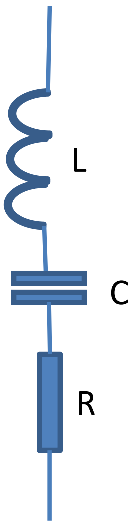
$\tilde{Z} = R + i\omega L$ $\left|\tilde{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

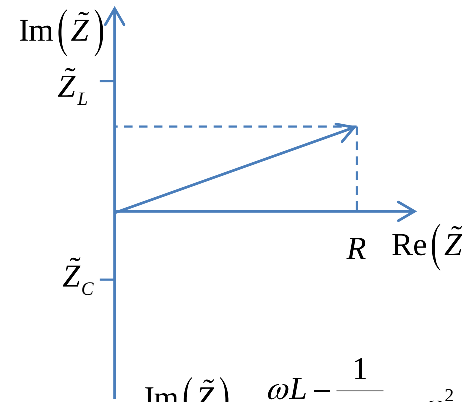
$tg\phi = \frac{\omega L}{R} = Q$ - činitel kvality

$Q \to \infty$ ideální cívka

Zapojení dobře vystihuje cívku při nízkých frekvencích, pro vyšší frekvence je vhodnější paralelní kombinace RL

Sériové zapojení RLC





Sériový rezonanční obvod

impedance $\tilde{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

střední výkon

$$\bar{N} = \frac{1}{2}U_0 I_o \cos|\phi| = \frac{1}{2}U_0 \frac{U_0}{|\tilde{Z}|}\frac{\mathrm{Re}\left|(\tilde{Z})\right|}{|\tilde{Z}|} = \frac{1}{2}U_0^2 \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$tg\phi = \frac{\mathrm{Im}(\tilde{Z})}{\mathrm{Re}(\tilde{Z})} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\gamma\omega}$$

$\gamma = \frac{R}{2L}$ - činitel útlumu

V rezonanci $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\boxed{\rightarrow \bar{N}_{\max} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}}$ maximum rezonanční křivky

Poloviční výška maxima středního výkonu pro frekvenci $\omega_{1,2}$ $\bar{N}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\bar{N}_{\max}}{2}$

Je splněno pro $R^2 = \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2$ analogicky pro ω_2

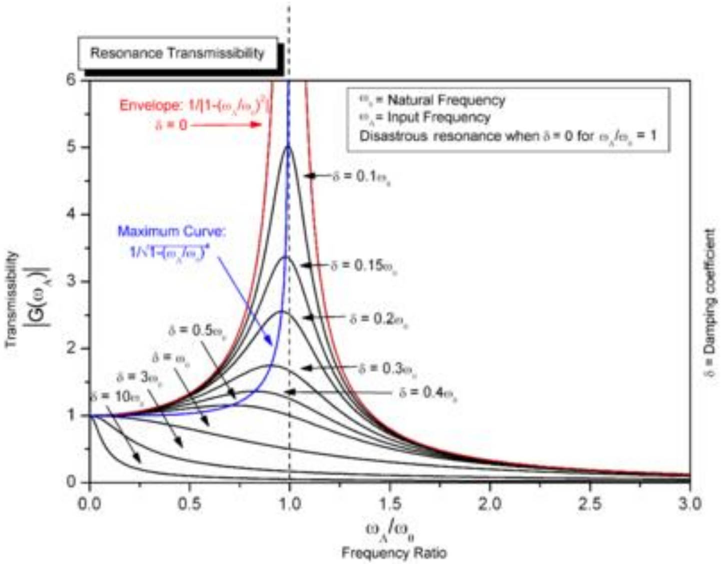
Použijeme vztah pro $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ a $\gamma = \frac{R}{2L}$ dostaneme $\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) = 4\gamma^2\omega^2$

Z toho druhá odmocnina $\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\gamma\omega \rightarrow \omega^2 \mp 2\gamma\omega + \gamma^2 = \omega_0^2 + \gamma^2 \rightarrow (\omega \mp \gamma)^2 = \omega_0^2 + \gamma^2$

Po odmocnění $\omega \mp \gamma = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$ frekvence pro poloviční výšku $\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \pm \gamma$

Šířka rezonanční křivky v poloviční výšce (FWHM) je tedy $\boxed{\omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \frac{R}{L}}$

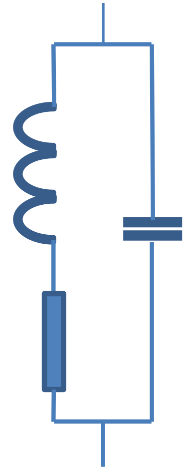
Rezonanční křivka je tím užší, čím je menší tlumení – frekvenční analýza, úzkopásmové přenosy



Rezonanční křivka pro různá tlumení (z Wikipedie)

Jiná zapojení rezonančních obvodů

Paralelní zapojení C a RL



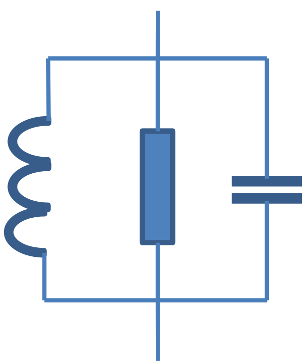
$$\tilde{Y} = \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L}$$

$$\tilde{Y} = -\frac{\omega C}{i} + \frac{1}{R + i\omega L}$$

Impedance je reálná pro

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{L} C\right) = \omega_0^2 \left(1 - 2\gamma RC\right)$$

Paralelní zapojení RLC



$$\tilde{Y} = \frac{1}{\tilde{Z}_L} + \frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{R} + i\omega C = \frac{R + i\omega L - \omega^2 LCR}{i\omega LR} = \frac{\omega L - iR\left(1 - \omega^2 LC\right)}{\omega LR}$$

Pro frekvenci $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ je admitance minimální a reálná $\tilde{Y} = \frac{1}{R}$

fázový posun admitance $tg\phi' = \frac{R\left(1 - \omega^2 LC\right)}{\omega L}$